RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques

Département d'Analyse

Mémoire

en vue de l'obtention du Diplôme de

MASTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **Analyse Mathématique, Equations aux Dérivées Partielles et Applications**

THÈME : **Décroissance générale de l'énergie associée à l'équation d'une plaque viscoélastique avec un terme retard**

Présenté par **Nail Baloul**

Sous la direction du Professeur **Ammar KHEMMOUDJ**

Soutenu le 13/06/2023

Devant le jury composé de

Mr.	**Khaled El Ghaouti**	**BOUTARÈNE**	*USTHB*	Président
Mme.	**Lamia**	**SEGHOUR**	*USTHB*	Examinatrice
Mr.	**Ammar**	**KHEMMOUDJ**	*USTHB*	Encadrant

Code Mémoire : EDP/02/2023

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à exprimer ma profonde reconnaissance à Mr. Khemmoudj, qui, en qualité de directeur de ce mémoire, a, de par sa patience, sa disponibilité et ses judicieux conseils, précieusement contribué à alimenter ma réflexion.

Je souhaite, également, témoigner ma gratitude aux enseignants de la faculté de Mathématiques qui ont répondu à mes questions et sollicitations dans le cadre de mes recherches.

Je remercie les membres de jury Mr. Boutarene et Mme. Seghour qui ont accepté de juger mon présent travail.

Je dédie, enfin, ce mémoire à mes parents qui m'ont apporté un soutien inestimable et qui demeurent la clé de tous mes accomplissements.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence globale, de la régularité et du comportement asymptotique de solutions faibles d'un problème modélisant le mouvement vibratoire d'une plaque viscoélastique avec un retard interne.

L'objectif principal de ce travail est de montrer que l'énergie associée au système est décroissante lorsque la variable temporelle tend vers l'infini.

Nous avons, en nous basant sur la méthode de Faedo-Galerkin, étudié l'existence globale et l'unicité de solutions faibles du problème.

Nous avons démontré, par la suite, la stabilisation du système en établissant la décroissance générale de l'énergie, obtenue en utilisant la méthode de Lyapunov.

Mots clés : Plaque viscoélastique, Retard, Stabilité, Faedo-Galerkin, Lyapunov, Décroissance générale.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the well-posedness and asymptotic behaviour of the initial and boundary value problem modelling the vibrations of a viscoelastic plate with a time delay term in the internal feedback.

The main purpose of this work is to show a general decay result of the energy.

Under suitable assumptions, we first established the global well-posedness of the equation by using Faedo-Galerkin approximations.

Moreover, by using energy perturbation method, we proved a general decay result of the energy provided that the weight of the delay is less than the weight of the damping.

Key words : Viscoelastic Plate, Delay, Memory, Stability, Faedo-Galerkin, Lyapunov, General Decay.

Notations

Dans toute la suite, nous adopterons les notations suivantes.

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$,

$\partial\Omega$ frontière de Ω,

$C(\Omega)$ espace des fonctions continues sur Ω,

$C_c(\Omega)$ espace des fonctions continues à support compact dans Ω,

$C^k(\Omega)$ espace des fonctions k fois différentiables sur Ω, $(k > 0)$,

$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k\ \geq 0} C^k(\Omega)$ espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, $(k > 0)$,

$C_0^\infty(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$ espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω,

$\mathscr{D}'(\Omega)$ espace des distributions sur Ω, dual de $\mathscr{D}(\Omega)$,

$L^p(\Omega)$ espace de Lebesgue, $0 \leq p \leq +\infty$,

$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega), H_0^m(\Omega)$ espaces de Sobolev, $0 \leq p \leq +\infty$, $m \in \mathbb{N}$,

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ gradient de la fonction u,

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ laplacien de la fonction u,

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ norme euclidienne de x,

$\|u\|_p = \|u\|_{L^p}$ norme dans l'espace $L^p(\Omega)$, $p \in [1; +\infty]$,

p' exposant conjugué au sens de Young de p, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$(.,.)$ produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$,

$\rightarrow$ convergence forte,

$\rightharpoonup$ convergence faible,

$\rightharpoonup^*$ convergence faible étoile.

INTRODUCTION ET PRÉLIMINAIRES

La modélisation mathématique consiste à représenter une réalité physique et concrète en un modèle mathématique abstrait. L'intérêt majeur d'une telle démarche est de permettre l'accès à la théorie mathématique, notamment les outils et techniques d'analyse et de calcul. En pratique, le problème est explicité sous forme d'une ou plusieurs équations faisant intervenir une ou plusieurs fonctions dépendant de variables spatiales et temporelle ainsi que leurs dérivées successives. Les équations aux dérivées partielles apparaissent fréquemment dans la description de phénomènes naturels. Elles traduisent les principes fondamentaux qui régissent de nombreux processus physiques, biologiques ou économiques. Par exemple, elles permettent d'exprimer les lois de conservation qui gouvernent les phénomènes mécaniques.

Tout système mécanique ayant une masse (et un élément flexible) est sujet à des mouvements vibratoires. Un mouvement oscillatoire est déclenché lorsque le système est écarté de sa position d'équilibre en raison d'une énergie provenant d'une source externe et transmise au système.

Définie comme la propagation d'une perturbation, une onde est souvent le produit d'une déformation locale d'un milieu continu. On peut distinguer deux catégories d'ondes. La première est d'origine mécanique et nécessite la présence d'un support matériel préexistant, sans quoi elle ne pourrait se manifester. La seconde correspond aux ondes électromagnétiques, dues au déplacement de photons (quanta d'énergie), qui ont la propriété de se déplacer dans le vide, s'affranchissant donc de la présence d'un support matériel. Les exemples les plus visibles d'ondes sont les vagues à la surface de la mer et les mouvements d'une corde vibrante. Les principales caractéristiques d'une vibration sont son amplitude, qui représente la hauteur de la déformation par rapport à la position de référence et sa vitesse de propagation.

Nous nous intéressons, dans ce travail, aux vibrations transversales d'une plaque viscoélastique sur laquelle s'exercent des efforts. La théorie des plaques vise à étudier les déformations subies par une plaque soumise à des contraintes. Le phénomène vibratoire ainsi engendré est déterminé puis analysé en fonction des propriétés de la plaque et de la nature des forces d'application.

Une plaque viscoélastique jouit de deux propriétés bien définies. D'une part, son élasticité, qui traduit la capacité du matériau à conserver et restituer de l'énergie après la déformation (d'où la réversibilité de la déformation) et d'autre part, sa viscosité qui traduit sa propension à dissiper de l'énergie (et donc de résistance à la déformation). La viscoélasticité se distingue de l'élasticité par le fait que l'état de contrainte d'un matériau viscoélastique, à l'instant présent, dépend des déformations subies aux instants passés (ce qui n'est pas le cas pour un matériau élastique). Ainsi, le matériau viscoélastique est doté d'une propriété de mémoire.

La réponse d'un solide viscoélastique à l'application d'une force s'opère en deux temps. D'abord, il se manifeste, après relâchement de la contrainte, un retour élastique instantané. Ensuite, il se produit une réponse différée, précédée d'un moment de latence, dit temps de fluage. Evidemment, cet effet retard se répercute dans le comportement du matériau et peut être à l'origine de l'instabilité du système.

Dans un système mécanique, un amortisseur est destiné à s'opposer aux forces de contraintes qui s'exercent sur le système. Ainsi, son rôle est d'atténuer l'amplitude des oscillations en amortissant les vibrations et entraîne, de ce fait, une dissipation de l'énergie du système.

Le but principal de l'étude des vibrations est de déterminer leurs effets sur la performance du système considéré afin de pouvoir, si on le souhaite, atténuer, voire contrôler, leur influence. Souvent, l'objectif final visé sera de corriger le déséquilibre induit par le phénomène vibratoire, en faisant intervenir plusieurs facteurs de dissipation d'énergie, afin d'aboutir in fine à la stabilisation du système.

0.1 Position du problème

On traite, dans ce mémoire, une équation modélisant les vibrations d'une plaque de type Kirchhoff soumise à des contraintes. Le problème est formulé de la manière suivante.

L'équation aux dérivées partielles décrivant le phénomène mécanique étudié est

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) - M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds \\ &+ \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) + f(u(x,t)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$, qui représente la surface de la plaque viscoélastique.

— Le terme $u(x,t)$ représente la flexion de la plaque au point x et à l'instant $t > 0$.

— La fonction u_{tt} désigne l'accélération du matériau.

— Le terme $\Delta^2 u$ provient de la théorie des déformations de milieux élastiques.

— L'expression $M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u$ est due au phénomène ondulatoire localisé sur une plaque de type Kirchhoff.

— La fonction $\mu_1 u_t$ représente l'amortissement structurel du système.

— Le terme $\mu_2 u_t(x,t-\tau)$ est lié à un effet retard dans la réponse induite par la plaque suite à la contrainte appliquée.

— $\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds$ est un terme mémoire relatif à la dissipation interne du système.

— $f(u)$ est un terme source non linéaire.

Les fonctions M, g et f sont des fonctions de la variable réelle vérifiant des conditions appropriées, explicitées par la suite.

μ_1 et μ_2 sont des constantes positives et $\tau > 0$ représente le retard.

Les conditions initiales et l'historique de la vitesse considérés sont

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = h_0(x,t-\tau), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{0.2}$$

où les fonctions u_0, u_1 et h_0 sont des données du problème.

Enfin, l'équation est munie des conditions aux limites

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{0.3}$$

0.2 Notes historiques

Nous proposons, dans cette section, une brève présentation de quelques résultats ayant trait à la stabilisation de solutions d'équations viscoélastiques.

Messaoudi [20] a étudié le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{0.4}$$

et a établi la décroissance générale de la solution sous une hypothèse de décroissance sur le noyau g.

Le même auteur, accompagné de Mukiawa [21], a étudié l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution de l'équation modélisant les mouvements d'une plaque viscoélastique

$$u_{tt} - \Delta^2 u + \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds = 0, \tag{0.5}$$

et soumise à des conditions initiales et aux frontières appropriées. Dans ce cas, ils ont considéré l'ouvert $\Omega = (0,\pi) \times (-l,l)$ et une fonction g qui est positive et décroissante.

Nicaise et Pignotti [23] ont traité l'équation modélisant les mouvements oscillatoires d'un système assujetti à un amortissement linéaire et à une dissipation interne se manifestant par la présence d'un terme retard

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\left[\mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau)\right] = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,+\infty), \tag{0.6}$$

où μ_1 et μ_2 sont des constantes positives. Cette équation est munie de conditions initiales ainsi que de conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann convenables et a est une fonction positive presque partout dans Ω (et strictement positive dans un voisinage de la frontière de Neumann). Ils ont prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie lorsque $\mu_2 < \mu_1$.

On souhaite, également, mentionner la contribution de Kirane et Said-Houari [18] qui ont étudié le comportement asymptotique du problème suivant

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = 0, \tag{0.7}$$

muni de conditions initiales et de conditions frontières de type Dirichlet. Sous des hypothèses convenables sur la fonction de relaxation g, ils ont montré l'existence globale de solutions ainsi que la décroissance générale de l'énergie lorsque $0 < \mu_2 \leq \mu_1$.

Dai et Yang [9] ont amélioré les résultats obtenus par Kirane et Said-Houari en prouvant l'existence globale de solutions au problème précédent sans restrictions sur μ_1 et μ_2 et en démontrant la décroissance générale de l'énergie lorsque $\mu_1 = 0$.

Yang [28] a également traité l'équation d'un système viscoélastique de type Euler-Bernoulli

$$u_{tt} - \Delta^2 u + \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = 0. \tag{0.8}$$

Sous des restrictions similaires sur les données, il a établi un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie associée à la solution.

Nous énonçons, désormais, les hypothèses nécessaires à la démonstration de nos résultats.

Hypothèses 0.1. 1. *On suppose que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe C^1 satisfaisant*

$$zM(z) \geq \hat{M}(z), \quad \forall z \geq 0, \tag{0.9}$$

où

$$\hat{M}(z) = \int_0^z M(s)ds.$$

2. *Concernant la fonction de relaxation g, on suppose que*

   (a) *$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction telle que*

$$\begin{aligned} &g(0) > 0, \quad g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \\ &1 - \lambda \int_0^\infty g(s)ds = l > 0, \end{aligned} \tag{0.10}$$

   où $\lambda > 0$ est la constante d'injection vérifiant

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq \lambda \|\Delta u(t)\|^2, \quad \forall u \in H^2(\Omega).$$

   (b) *On admet qu'il existe une fonction $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ positive, décroissante et différentiable qui satisfait*

$$g'(t) \leq -\mu(t) g(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{0.11}$$

$$\int_0^\infty \mu(t)dt = +\infty. \tag{0.12}$$

Des exemples de telles fonctions sont donnés par Messaoudi [20], à savoir,

$$\begin{aligned}
&g(t) = \frac{a}{(1+t)^\nu}, \quad \nu > 1,\\
&g(t) = ae^{-b(t+1)^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1,\\
&g(t) = \frac{a}{(1+t)[\ln(1+t)]^\nu}, \quad \nu > 1,
\end{aligned}$$

où a et b sont des constantes positives bien choisies.

3. *En ce qui concerne le terme source non linéaire, on admet que*

   (a) *la fonction f vérifie $f(0) = 0$ ainsi que la majoration*

   $$|f(u) - f(v)| \leq c_f(1 + |u|^r + |v|^r)|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \tag{0.13}$$

   où $c_f > 0$ est une constante, et r vérifie

   $$\begin{aligned}
   &0 < r < \frac{4}{n-4} \ \textit{si}\ n \geq 5,\\
   &r > 0 \ \textit{si}\ 1 \leq n \leq 4.
   \end{aligned} \tag{0.14}$$

   (b) *f satisfait également à l'estimation suivante*

   $$0 \leq \hat{f}(u) \leq f(u)u, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{0.15}$$

   où

   $$\hat{f}(z) = \int_0^z f(s)ds.$$

4. *On introduit, finalement, la constante $\xi > 0$ qui vérifie*

$$\tau\mu_2 < \xi < \tau(2\mu_1 - \mu_2). \tag{0.16}$$

Afin de pouvoir disposer des outils d'analyse fonctionnelle, présentés au chapitre premier, et notamment d'une formulation variationnelle adéquate, on se propose, dans la section suivante, de transformer le problème (0.1)-(0.3) en un problème équivalent.

0.3 Problème équivalent

Afin de traiter le terme retard lié à la dissipation interne, motivé par Nicaise et Pignotti [23] et Nicaise, Valein et Fridman [24], on introduit la nouvelle variable dépendante z définie par

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \quad x \in \Omega, \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0. \tag{0.17}$$

En utilisant le théorème de dérivation de fonctions composées, il est facile de vérifier que

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \quad (x,\rho,t) \in \Omega \times (0,1) \times (0,+\infty). \tag{0.18}$$

Ainsi, l'équation (0.1) devient

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds \\ &+ \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 z(x,1,t) + f(u) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \end{aligned} \tag{0.19}$$

celle-ci étant munie de l'égalité de compatibilité (0.18). Les conditions initiales, l'historique de la vitesse et les conditions aux limites s'écrivent, ainsi,

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ z(x,\rho,0) = h_0(x,-\rho\tau), \quad (x,\rho) \in \Omega \times (0,1), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{0.20}$$

On se propose, désormais, de définir les solutions faibles du problème (0.1)-(0.3).

Soit donc

$$(u_0,u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

la donnée initiale du problème, on dit qu'une fonction

$$Z = Z(u,u_t) \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$$

est une solution faible du problème (0.1)-(0.3) si $Z(0) = (u_0,u_1)$ et si Z vérifie, pour toute fonction test $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &(u_{tt},w) + (\Delta u, \Delta w) + (M(\|\nabla u(t)\|^2)\nabla u, \nabla w) - \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla w)ds \\ &+ \mu_1(u_t(x,t),w) + \mu_2(u_t(x,t-\tau),w) + (f(u),w) = 0. \end{aligned} \tag{0.21}$$

Par souci de simplicité, on introduit la notation suivante

$$(g \circ \nabla u)(t) = \int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds, \tag{0.22}$$

et on donne le résultat préliminaire suivant.

Lemme 0.1. *Soient $u \in C(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Alors on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((g \circ \nabla u)(t) - \int_0^t g(s)ds\|\nabla u(t)\|^2\right) \\ &+ \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s), \nabla u_t(t)\right) ds \\ =&\frac{1}{2}\left(g' \circ \nabla u\right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2. \end{aligned} \tag{0.23}$$

Démonstration. Le deuxième membre de (0.23) s'écrit d'après (0.22),

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^t g'(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2.$$

En outre, concernant le premier membre, nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((g \circ \nabla u)(t) - \int_0^t g(s)ds\|\nabla u(t)\|^2\right) \\ =&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((g \circ \nabla u)(t)\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\|\nabla u(t)\|^2\right) \\ =&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right). \end{aligned}$$

D'une part, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} &\int_0^t g(t-s)ds = \int_0^t g(s)ds, \\ &\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right) = \frac{d}{dt}(\hat{g}(t)) = g(t), \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right) = \left(\nabla u(t), \nabla u_t(t)\right). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right) \\ =&\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(g(t-s)\right)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2\right) ds \\ =&\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds - \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t), \nabla u_t(t)\right) ds. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors déduire que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2 ds\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)\\
=&\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2 ds-\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t),\nabla u_t(t)\right)ds\\
&-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2-\int_0^t g(t-s)ds\left(\nabla u(t),\nabla u_t(t)\right).
\end{aligned}$$

Aussi, le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2 ds-\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t),\nabla u_t(t)\right)ds\\
&-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2-\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(t),\nabla u_t(t)\right)ds+\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s),\nabla u_t(t)\right)ds,
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2,$$

d'où le Lemme 0.1. □

Remarque 0.1. *On démontre de manière identique que, pour tout $u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega))$ et pour tout $g \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$,*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(g\circ\Delta u\right)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\Delta u(t)\|^2\right)\\
&+\int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(s),\Delta u_t(t)\right)ds\\
=&\frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u\right)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|^2.
\end{aligned}\tag{0.24}$$

Plan d'étude Le mémoire comporte trois chapitres présentés comme suit.

Dans le premier chapitre, nous procédons à des rappels de notions fondamentales d'analyse fonctionnelle et nous énonçons quelques résultats préliminaires nécessaires pour notre présent travail.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des propriétés d'existence globale, d'unicité et de régularité des solutions faibles du problème considéré, en utilisant une méthode de compacité.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique de la solution en établissant un résultat de décroissance de l'énergie associée au système étudié.

CHAPITRE

1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle ainsi que certains théorèmes fondamentaux. Pour plus de détails les concernant, on peut référer le lecteur aux ouvrages de référence dus à Adams et Fournier [1], Brézis [4] et Evans [12].

1.1 Espaces de Lebesgue

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de sa mesure de Lebesgue dx, où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, et soit p un nombre réel avec $1 \leq p \leq \infty$. On commence par énoncer les définitions et résultats élémentaires concernant les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et telles que la fonction $|u|^p$ soit intégrable au sens* *de Lebesgue sur* Ω*, cet ensemble est défini par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable, telle que } \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$*, on note* $L^\infty(\Omega)$ *l'espace des (classes de) fonctions* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurables sur* Ω *et essentiellement bornées sur* Ω*, cet ensemble est défini par*

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable, tel que } \exists C > 0 : |u(x)| \le C \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_\infty =: \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess |u(x)| = \inf \{ C > 0 : |u(x)| \le C \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

Proposition 1.1. *Pour tout* $1 \le p \le +\infty$*,* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 2, Théorème 2.16]. □

Proprietés 1.1.

1. $L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u, v) =: (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

2. *Pour tout* $1 < p < +\infty$*,* $L^p(\Omega)$ *est un espace réflexif et séparable, et le dual de* $L^p(\Omega)$ *s'identifie (via le théorème de représentation de Riesz-Fréchet [4, Chapitre 5, Théorème 5.5]) avec* $L^{p'}(\Omega)$*.*
3. $L^1(\Omega)$ *est séparable et non réflexif. Son dual s'identifie avec* $L^\infty(\Omega)$*.*
4. $L^\infty(\Omega)$ *n'est ni réflexif ni séparable. Le dual de* $L^\infty(\Omega)$ *ne coïncide pas avec* $L^1(\Omega)$*, en fait, il contient strictement* $L^1(\Omega)$*.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 4, Théorème 4.10 et Théorème 4.11]. □

Définition 1.2. *On dit que* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ *si* $f 1_K \in L^p(\Omega)$ *pour tout compact* $K \subset \Omega$*, où* 1_K *est la fonction indicatrice de la partie* K*.*

Lemme 1.1. *Soit* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tel que*

$$\int_\Omega f \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c(\Omega).$$

Alors $f = 0$ *pp sur* Ω*.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 4, Lemme 4.1]. □

Espaces de fonctions à valeurs vectorielles $L^p(0,T;X)$ Dans ce paragraphe, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach X.

Soit $T > 0$, on donne la définition suivante de l'espace $L^p(0,T;X)$.

Définition 1.3. *L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'espace des fonctions mesurables défini comme suit.*

Pour $p \in [1,\infty[$, on pose

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : (0,T) \to X \ \textit{mesurable, telle que} \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < +\infty, \quad 1 \leq p < +\infty \right\}.$$

Pour $p = \infty$, on pose

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ u : (0,T) \to X \ \textit{mesurable, telle que} \sup_{t\in(0,T)} ess \|u(t)\|_X < +\infty \right\}.$$

Ces deux espaces sont munis des normes respectives

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \|u(t)\|_X = \inf \left\{ C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C \ p.p. \ t \in (0,T) \right\}.$$

Remarques 1.1.
1. *Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^{p'}(0,T;X)$ est le dual de l'espace $L^p(0,T;X)$.*
2. *L'espace $L^\infty(0,T;X)$ est le dual de l'espace $L^1(0,T;X)$.*

Définition 1.4. *L'espace $L^p(Q)$ est défini par*

$$L^p(Q) = L^p(0,T,L^p(\Omega)).$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Q est le cylindre de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ tel que $Q = \Omega \times (0,T)$, avec T fini.

Définition 1.5. *L'espace $C([0,T];X)$ désigne l'espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ continues, cet espace est muni de la norme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Proposition 1.2. *$C([0,T];X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$, pour $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Voir Ziedler [30, Chapitre 23, Théorème 23.2]. $\square$

Proposition 1.3. *Si $u \in L^p(0,T;X)$ et $\frac{d}{dt} \in L^{p'}(0,T;X)$, alors $u \in C(0,T;X)$. Autrement dit, il existe une unique fonction continue $w : [0,T] \to X$ qui coïncide presque partout avec la fonction u sur $[0,T]$.*

Démonstration. Voir Ziedler [30, Chapitre 23, Proposition 23.23]. $\square$

1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit p un nombre réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. Les espaces que nous allons introduire jouent un rôle primordial dans la résolution de divers types de problèmes aux limites.

Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.6. *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \textit{tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ \textit{pour tout } i = 1, ..., n \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée de u au sens des distributions.

Proposition 1.4. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 9, Proposition 9.1]. $\square$

Remarque 1.1. *Lorsque $p = 2$, on note $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$, cet espace, muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v) + (\nabla u, \nabla v) = (u,v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

est un espace de Hilbert.

Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ Soient m un entier, $m \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre réel avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.7. *L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \ \textit{tel que } D^k u \in L^p(\Omega), \quad |k| \leq m \right\},$$

où $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, $\quad |k| = k_1 + k_2 + ... + k_n$, et $D^k u$ est la dérivée d'ordre k de u au sens des distributions. Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|k| \leq m} \left\| D^k u \right\|_p^p \right)^{1/p}, \ si\ 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|k| \leq m} \left\| D^k u \right\|_\infty, \ si\ p = +\infty.$$

Remarque 1.2. *Lorsque $p = 2$, on note $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, cet espace est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|k| \leq m} \int_\Omega D^k u D^k v dx, \ pour\ tout\ u, v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.5. *Soit $m \in \mathbb{N}$, alors on a les assertions suivantes.*

1. *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty]$.*
2. *$W^{m,p}(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, +\infty[$.*
3. *$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Démonstration. Voir Brézis [1, Chapitre 3, Théorème 3.3 et Théorème 3.6]. □

Espaces de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ En géneral, $\mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note alors $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Lorsque $p = 2$, l'espace $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ désigne la fermeture de l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Muni du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$ et de sa norme induite correspondante, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Proprieté 1.1. *Si Ω est borné, alors $H_0^1(\Omega)$ peut être caractérisé par*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \ \textit{tel que } u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

1.3 Topologies faible et faible étoile

Soit X un espace de Banach, on note X' son dual, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur X.
On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge (fortement) vers x dans X, et on note $x_n \to x$ dans X, si et seulement si $\|x_n - x\|_X \to 0$.
De même, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ converge (fortement) vers f dans X', et on note $f_n \to f$ dans X', si et seulement si $\|f_n - f\|_{X'} \to 0$.
On rappelle également que la topologie la moins fine sur X est celle qui contient le moins d'ouverts.

Topologie faible

Définition 1.8. *La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les formes linéaires définies sur X.*

Définition 1.9. *On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge faiblement (ou au sens de la topologie faible) vers x dans X, et on note $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$, si*

$$\langle f, x_n - x\rangle_{X'\times X} \to 0, \ \textit{pour tout } f \in X'.$$

Proposition 1.6. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X, on a*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X') \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle_{X'\times X}$ pour tout $f \in X'$.*
2. *Si $x_n \to x$ (fortement), alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$.*
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$ et si $f_n \to f$ dans X', alors $\langle f_n, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle f, x\rangle_{X'\times X}$.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 3, Proposition 3.5]. □

Proposition 1.7. *Lorsque X est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(X, X')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Démonstration. Voir [4, Chapitre 3, Proposition 3.6]. □

Le résultat précédent n'est pas vrai en dimension infinie.

Nous allons passer maintenant à la notion de convergence faible étoile.

Topologie faible étoile

Définition 1.10. *La topologie faible étoile $\sigma(X', X)$ sur X' est la topologie la moins fine sur X' rendant continues toutes les applications définies sur X' par*

$$\phi_x(f) = \langle f, x \rangle_{X' \times X}, \quad f \in X', \text{ pour tout } x \in X.$$

Définition 1.11. *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ converge faiblement étoile (ou au sens de la topologie faible étoile) vers f dans X', et on note $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(X', X)$, si*

$$\langle f_n - f, x \rangle_{X' \times X} \to 0, \text{ pour tout } x \in X.$$

Proposition 1.8. *Soit (f_n) une suite de X', on a*

1. *$f_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X', X) \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle_{X' \times X}$ pour tout $x \in X$.*
2. *Si $f_n \to f$ (fortement), alors $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(X', X)$.*
   Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(X', X'')$, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(X', X)$.
3. *Si $f_n \rightharpoonup^* x$ pour $\sigma(X', X)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$.*
4. *Si $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(X', X)$ et si $x_n \to x$ dans X, alors $\langle f_n, x_n \rangle_{X' \times X} \to \langle f, x \rangle_{X' \times X}$.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 3, Proposition 3.12]. □

Remarques 1.2.
1. *Lorsque X est de dimension finie, la topologie faible étoile $\sigma(X', X)$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (f_n) converge faiblement étoile si et seulement si elle converge fortement. Ceci n'est pas vrai en dimension infinie.*
2. *La convergence faible dans X' entraîne la convergence faible étoile dans X'. La réciproque est vraie si l'espace X est réflexif.*
3. *En dimension finie, les topologies faible étoile, faible et forte coïncident.*

Après avoir rappelé les différentes notions de convergence, nous énonçons dans la section suivante des résultats qui joueront un rôle fondamental dans l'optique d'établir des théorèmes d'existence de solutions.

1.4 Principaux critères de convergence

Le théorème qui suit est très important dans la mesure où il permet de pallier l'abscence de compacité pour la topologie forte dans les espaces de Banach de dimension infinie.

Théorème 1.1 (Banach-Alaoglu)**.** *Soit X un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de X' est compacte pour la topolgie faible étoile.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 3, Théorème 3.15]. □

Une conséquence de ce résultat affirme que tout espace vectoriel normé séparable est séquentiellement compact pour la topolgie faible étoile. En particulier, on a les corollaires suivants.

Corollaire 1.1. *Soit X un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans X'. Alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement étoile dans X.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 3, Corollaire 3.26]. □

Corollaire 1.2. *Soit X un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans X. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans X.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 3, Théorème 3.27]. □

En fait, la réciproque du corollaire précédent est vraie, en effet on a le théorème suivant.

Théorème 1.2 (Eberlein-Šmulian)**.** *Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si il est séquentiellement faiblement compact. Autrement dit, X est réflexif si et seulement si toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans X.*

Démonstration. Voir Yosida [29, Appendice du Chapitre 5]. □

On procède dans la suite à la formulation des résultats précédents dans le cas des espaces de Lebesgue.

Définition 1.12. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$*, avec* $1 \leq p < +\infty$*. On dit qu'elle converge faiblement vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *si*

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega),$$

et on écrit

$$f_n \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } L^p(\Omega).$$

Définition 1.13. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^\infty(\Omega)$*. On dit qu'elle converge faiblement étoile vers* f *dans* $L^\infty(\Omega)$ *si*

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega),$$

et on écrit

$$f_n \rightharpoonup^* f \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(\Omega).$$

Proposition 1.9. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* $L^p(\Omega)$*, avec* $1 < p < +\infty$*, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans* $L^p(\Omega)$*, c'est à dire,*

$$\exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega), \exists f \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \int_\Omega f_{n_k} \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx.$$

Démonstration. Conséquence du Corollaire 1.2. □

En effet, lorsque $1 < p < +\infty$, la topologie faible $\sigma\left(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)\right)$ et la topologie faible étoile $\sigma\left(L^{p'}(\Omega), L^p(\Omega)\right)$ sont équivalentes.

Ce résultat est faux dans $L^1(\Omega)$ car cet espace n'est pas réflexif, en revanche, nous disposons d'un résultat similaire dans $L^\infty(\Omega)$ à condition de considérer la topologie faible étoile sur cet espace.

Proposition 1.10. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* $L^\infty(\Omega)$*, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement étoile dans* $L^\infty(\Omega)$*, c'est à dire,*

$$\exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega), \exists f \in L^\infty(\Omega), \forall \varphi \in L^1(\Omega), \int_\Omega f_{n_k} \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx.$$

Démonstration. Conséquence du Corollaire 1.1. □

Proposition 1.11. *Soit $1 < p \leq +\infty$. Soient (f_n) et (g_n) deux suites incluses respectivement dans $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$. Si f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$, et g_n converge faiblement vers g dans $L^{p'}(\Omega)$, alors $f_n g_n$ converge faiblement vers fg dans $L^1(\Omega)$.*

Démonstration. Conséquence de la Proposition 1.6. □

Lemme 1.2. *Soit (u_n) une suite de $L^p(\Omega \times (0,T))$ avec $1 < p < +\infty$ telle que*

$$\exists C > 0 : \quad \|u_n\|_{L^p(\Omega\times(0,T))} \leq C$$

et

$$\exists u \in L^p(\Omega \times (0,T)) \text{ telle que } u_n \to u \text{ converge p.p. dans } \Omega \times (0,T),$$

alors,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ converge faiblement dans } L^p(\Omega \times (0,T)).$$

Démonstration. Voir Evans [11]. □

Avant de donner les principaux résultats d'immersion, on rappelle la notion d'injection d'un espace dans un autre.

Définition 1.14. *Soient X et Y deux espaces de Banach, on dit que X s'injecte avec continuité dans Y si l'application identité $Id : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ est continue de X dans Y. Autrement dit,*

$$\exists C > 0 : \|x\|_X \leq C\|x\|_Y, \quad \forall x \in X.$$

On dit que X s'injecte avec compacité dans Y si, de toute suite bornée dans X, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans Y.

Théorème 1.3 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on a les inclusions suivantes.*

1. *Si $1 \leq p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection continue pour tout $q \in [1, p^*]$ où p^* est le conjugué de Sobolev de p, donné par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

2. *Si* $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec injection continue pour tout* $q \in [1, +\infty[$.

De plus,

$$\exists C = C(p, n) > 0 : \|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

où C *ne dépend que de* p *et* n.

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 10, Théorème 9.9, Corollaire 9.10 et Corollaire 9.11]. □

Théorème 1.4 (Morrey)**.** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ *avec injection continue. De plus,*

$$\exists C = C(p, n) > 0 : |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ p.p.\ x, y \in \Omega, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

où $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$ *et* C *ne dépend que de* p *et* n.

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 9, Théorème 9.12]. □

Corollaire 1.3. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$. *Soient* $m \geq 1$ *et* $1 \leq p < \infty$,

1. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, *alors* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec injection continue pour tout* $q \in [1, q]$ *où* q *est donné par* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.
2. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, *alors* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec injection continue pour tout* $q \in [1, +\infty[$.
3. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, *alors* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ *avec injection continue.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 9, Corollaire 9.15]. □

Théorème 1.5 (Rellich-Kondrashov)**.** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$.

1. *Si* $1 \leq p < n$, *l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *est compacte pour* $q \in [1, p^*[$, *où* p^* *est le conjugué de Sobolev de* p.
2. *Si* $p = n$, *l'injection* $W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *est compacte pour tout* $q \in [1, +\infty[$.
3. *Si* $p > n$, *l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ *est compacte.*

Démonstration. Voir Brézis [4, Chapitre 10, Théorème 9.16]. □

En particulier, $H^1(\Omega)$ s'injecte avec compacité dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 1.3. *L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte. En effet, soit* (f_n) *une suite convergente faiblement vers* f *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

1. *Si* $1 \leq p < n$, *alors*
$$f_n \to f \text{ fortement dans } L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-p}.$$
2. *Si* $p = n$, *alors*
$$f_n \to f \text{ fortement dans } L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty.$$
3. *Si* $p > n$, *alors*
$$f_n \to f \text{ fortement dans } L^\infty(\Omega).$$

Les deux lemmes suivants seront exploités dans la preuve de nos résultats du chapitre suivant.

Lemme 1.3 (Aubin-Lions-Simon)**.** *Soient* X, X_0, X_1 *trois espaces de Banach tels que* X_0 *et* X_1 *soient réflexifs et* $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. *Supposons que l'injection de* X_0 *dans* X *soit compacte et que celle de* X *dans* X_1 *soit continue. On pose*
$$W = \left\{ u \in L^{p_0}([0,T]; X_0), \quad \frac{du}{dt} \in L^{p_1}([0,T]; X_1) \right\}.$$
Si $p_0, p_1 \in]1 + \infty[$, *alors, l'injection de* W *dans* $L^{p_0}([0,T]; X)$ *est compacte.*

Si $p_0 = +\infty$ *et* $p_1 > 0$, *alors l'injection de* W *dans* $C([0,T]; X)$ *est compacte.*

Démonstration. Voir Simon [27, Corollaire 4]. □

Lemme 1.4 (Kim)**.** *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de fonctions telle que*
$$u_n \rightharpoonup^* u \text{ dans } L^\infty(0,T; H^\beta(\Omega)),$$
et
$$\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2(0,T; H^\alpha(\Omega)),$$
où $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Alors,
$$u_n \to u \text{ dans } C(0,T; H^r(\Omega)), \quad \text{pour tout } r < \beta.$$

Démonstration. Voir Kim [17, Lemme 1.4]. □

1.5 Quelques résultats utiles

Nous rappelons, à présent, quelques lemmes qui seront utiles afin de démontrer les principaux résultats du présent travail.

Lemme 1.5 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et de plus, on a l'inégalité*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{1.1}$$

Démonstration. Voir Adams et Fournier [1, Chapitre 2, Théorème 2.4]. □

Remarque 1.4. *En particulier, si $p = p' = 2$, l'inégalité (1.1) est dite inégalité de Cauchy-Schwarz et s'écrit*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\| \|v\|. \tag{1.2}$$

Lemme 1.6 (Inégalité de Young)**.** *Soient $p \in]1, +\infty[$ et $a, b \geq 0$. Alors pour tout $\eta > 0$,*

$$ab \leq \eta a^p + C(\eta) b^{p'}, \tag{1.3}$$

où

$$C(\eta) = \frac{1}{p' \, (\eta p)^{\frac{p}{p'}}}.$$

Démonstration. Voir Adams et Fournier [1, Chapitre 2, Théorème 2.4]. □

Remarques 1.3. *1. Si $p = p' = 2$, l'inégalité précédente s'écrit*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \tag{1.4}$$

2. Si de plus, $\eta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \tag{1.5}$$

Lemme 1.7 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*. Alors, pour tout* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*,*

$$\exists C_p = C(\Omega, p) : \|u\|_p \leq C_p \|\nabla u\|_p, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.6}$$

En particulier, on a, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\exists C = C(\Omega) : \|u\| \leq C\|\nabla u\|. \tag{1.7}$$

Autrement dit, $\|\nabla u\|$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Démonstration. Voir Ciarlet [7, Théorème 6.5.2]. □

Lemme 1.8 (Inégalité de Grönwall)**.** *Soient* $\varphi \in L^1(0, +\infty)$ *et* $\psi \in L^\infty(0, +\infty)$ *deux fonctions positives et soit* β *une constante positive ou nulle. Si*

$$\psi(t) \leq \beta + \int_0^t \varphi(s)\psi(s)ds,$$

alors

$$\psi(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t \varphi(s)ds\right).$$

Démonstration. Voir Grönwall [15]. □

En particulier, si φ est une constante $C > 0$, on a

$$\psi(t) \leq \beta e^{Ct}.$$

Lemme 1.9 (Formule de Green)**.** *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^n$*. Si* $u \in H^2(\Omega)$ *et* $v \in H^1(\Omega)$*, alors on a la formule*

$$-\int_\Omega \Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\sigma, \tag{1.8}$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ *est la normale unitaire extérieure à* $\partial\Omega$*.*

Démonstration. Voir Ciarlet [7, Théorème 6.7.1]. □

CHAPITRE

2

EXISTENCE GLOBALE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES

Nous allons, dans ce présent chapitre, énoncer puis prouver nos résultats d'existence globale et d'unicité de la solution au problème (0.1)-(0.3). La démonstration du théorème principal repose sur la méthode classique de Faedo-Galerkin.

2.1 Méthode de Faedo-Galerkin

Cette méthode, due aux mathématiciens russe Boris Grigoryevich Galerkin ($1871-1945$) et italien Alessandro Faedo ($1913-2001$), se base sur deux principes, l'approche variationnelle du problème et l'approximation interne de l'espace d'étude. On se propose d'abord de les définir brièvement.

Approche variationnelle L'approche variationnelle d'une équation aux dérivées partielles consiste en la transformation de la formulation initiale (dite forte) de l'équation en une formulation variationnelle (dite faible) en multipliant l'équation par une fonction, appelée fonction test, appartenant à un certain espace fonctionnel, puis en l'intégrant. L'intérêt de cette approche est de donner accès aux concepts et outils d'analyse fonctionnelle, notamment ceux relatifs aux espaces de Hilbert et aux espaces de Sobolev (produit scalaire, convergences faibles, résultats de compacité, ...).

Approximation interne Soit un problème admettant une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert V. La méthode d'approximation interne, dite également méthode de Galerkin, consiste à résoudre le problème variationnel en remplaçant l'espace de départ V par une famille de sous-espaces $V_m \subset V$ de dimension finie. La résolution de ce problème approché aboutit à celle d'un système linéaire d'équations algébriques relativement simple à résoudre (par exemple, au moyen de méthodes numériques directes ou itératives).

On peut désormais expliciter les principales étapes qui composent la méthode de Faedo-Galerkin.

Cadre général de la méthode de Faedo-Galerkin Cette procédure peut se diviser en cinq étapes.

1. Après avoir défini le problème approché, on construit une suite de solutions appartenant à des espaces de dimension finie.
2. On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.
3. On opère un passage à la limite, justifié par des résultats de compacité, afin d'obtenir une solution faible du problème initial.
4. On vérifie que la solution satisfait aux conditions initiales.
5. On étudie, enfin, la continuité de la solution faible par rapport aux données, et en particulier son unicité.

2.2 Enoncé du théorème principal

Le théorème suivant est l'énoncé principal de ce chapitre. Il offre des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible au problème considéré en fonction de la régularité des données initiales.

Théorème 2.1. *Soit $\mu_2 \leq \mu_1$ et supposons les hypothèses (0.9)-(0.16) satisfaites.*

1. *Si les données initiales vérifient*

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega), \quad h_0 \in L^2(\Omega \times (0,1)),$$

alors le problème (0.18)-(0.20) admet une solution faible telle que

$$\begin{aligned} &u \in C(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)), \\ &u_t \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

2. *Pour assurer l'existence globale de solutions plus régulières, on suppose, seulement pour établir ce deuxième résultat, que f vérifie*

$$|\nabla f(u)| \leq C_f(1 + |u|^r), \tag{2.2}$$

où C_f est une constante positive et r est donné par (0.14).

Si les données initiales vérifient

$$u_0 \in H^3_{\partial\Omega}(\Omega), \quad u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad h_0 \in H^1(\Omega \times (0,1)),$$

où

$$H^3_{\partial\Omega}(\Omega) = \{u \in H^3(\Omega) : u = \Delta u = 0 \ \text{sur} \ \partial\Omega\},$$

alors la solution faible susmentionnée a une plus forte régularité

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^3(\Omega)), \\ &u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. *Dans les deux cas ci-dessus, la solution* (u, u_t) *dépend continûment de la donnée dans* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

   En particulier, le problème (0.18)-(0.20) admet une unique solution faible.

Comme préconisé précédemment, nous allons démontrer le Théorème 2.1 en plusieurs temps.

2.3 Formulation du problème approché

On détermine, d'abord, un sous-espace vectoriel de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, noté W_m, de dimension finie m destinée à tendre vers l'infini. On choisit comme base de cet espace les fonctions propres de l'opérateur bilaplacien Δ^2 muni des conditions aux limites $u = \Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$. Elles sont données par

$$\begin{cases} \Delta^2 \omega_m = \lambda_m \omega_m \text{ dans } \Omega, \\ \omega_m = \Delta \omega_m = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Celles-ci étant notées ω_m, l'espace W_m est donc défini par

$$W_m = Vect\left(\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}\right), \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

On introduit, pour $1 \leq j \leq m$, la suite $\phi_j(x, \rho)$ définie par

$$\phi_j(x, 0) = \omega_j(x).$$

Afin de pouvoir traiter le terme retard, on prolonge $\phi_j(x, 0)$ par $\phi_j(x, \rho)$ sur $L^2(\Omega \times (0, 1))$ et on pose

$$V_m = Vect\left(\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m\}\right), \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Soient données $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ et $h_0 \in L^2(\Omega \times (0, 1))$, on définit les suites approchées

$$\begin{aligned} u_m(t) := u_m(x, t) &= \sum_{j=1}^{m} g_{j_m}(t) \omega_j(x), \\ z_m(x, \rho, t) &= \sum_{j=1}^{m} h_{j_m}(t) \phi_j(x, \rho), \end{aligned} \tag{2.4}$$

qui satisfont au problème approché suivant

$$\begin{aligned}
&(u_{mtt}(t), \omega_j(x)) + (\Delta^2 u_m(t), \omega_j(x)) + (-M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t), \omega_j(x)) \\
&+ (f(u_m(t)), \omega_j(x)) + \int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), \omega_j(x))ds \\
&+ (\mu_1 u_{mt}, \omega_j(x)) + (\mu_2 z_m(x,1,t), \omega_j(x)) = 0, \\
&(\tau z_{mt}(x,\rho,t), \phi_j(x)) + (z_{m\rho}(x,\rho,t), \phi_j(x)) = 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
&u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} (u_0, \omega_j) = u_0^m, \\
&u_{mt}(0) = \sum_{j=1}^{m} (u_1, \omega_j) = u_1^m, \\
&z_m(x,\rho,0) = \sum_{j=1}^{m} (h_0, \omega_j) = z_0^m,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

telles que

$$\begin{aligned}
&u_0^m \to u_0 \text{ fortement dans } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\
&u_1^m \to u_1 \text{ fortement dans } L^2(\Omega), \\
&z_0^m \to h_0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega \times (0,1)).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

En utilisant la théorie classique des équations différentielles ordinaires et en remarquant le caractère lipschitzien continu des termes non linéaires, on déduit que le problème (2.5)-(2.6) admet une solution (g_{j_m}, h_{j_m}) définie sur $[0, t_m)$.

Le but de la prochaine étape est de prolonger l'intervalle $[0, t_m)$ à l'intervalle $[0, T]$, pour tout $T > 0$. Pour cela on établit des estimations sur la solution.

2.4 Première estimation

Soient (u_m) et (z_m) les suites dont les termes généraux respectifs vérifient le problème approché (2.5)-(2.6). On donne le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, la solution faible du problème approché*

(2.5) vérifie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_{mt}(t)\|^2+\|\Delta u_m(t)\|^2+\hat{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)+2\int_\Omega \hat{f}(u_m(t))dx\right)\\
&+\mu_1\|u_{mt}(t)\|^2+\mu_2\int_\Omega z_m(x,1,t)u_{mt}(t)dx\\
&-\int_0^t g(t-s)(\nabla u_m(s),\nabla u_{mt}(t))ds=0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Démonstration. On multiplie la première équation de (2.5) par $g'_{j_m}(t)$, et on somme pour j allant de 1 à m. Utilisant la convention de sommation d'Einstein, on a

$$g'_{k_m}(t)w_k(x)=\sum_{k=1}^{m}g'_{k_m}(t)w_k(x),$$

et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&(u_{mtt}(t),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))+(\Delta^2u_m(t),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
&-\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t),g'_{j_m}(t)\omega_j(x)\right)+(f(u_{mt}(t)),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
&+(\mu_1u_{mt}(t),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))+(\mu_2z_m(x,1,t),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
&+\int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))ds=0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En utilisant le fait que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g_{j_m}\right)^2=g'_{j_m}g_{j_m},\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g'_{j_m}\right)^2=g''_{j_m}g'_{j_m},\quad \frac{d}{dt}\hat{M}=M,$$

ainsi que la formule de Green (1.8), les termes du membre de gauche de l'équation précédente s'écrivent, respectivement, comme suit.

$$\begin{aligned}
&(u_{mtt}(t),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&(g''_{km}(t)\omega_k(x),g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g'_{k_m}(t)\omega_k(x),g'_{j_m}(t)\omega_j(x)\right)\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_{mt}(t)\|^2\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\Delta^2 u_m(t), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&(g_{k_m}(t)\Delta^2\omega_k(x), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&(g_{k_m}(t)\Delta\omega_k(x), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x))\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g_{k_m}(t)\Delta\omega_k(x), g_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x)\right)\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Delta u_m(t)\|^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t), g'_{j_m}(t)\omega_j(x)\Big)\\
=&M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Big(\nabla u_m(t), g'_{j_m}(t)\nabla\omega_j(x)\Big)\\
=&M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Big(g_{k_m}(t)\nabla\omega_k(x), g'_{j_m}(t)\nabla\omega_j(x)\Big)\\
=&M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(g_{k_m}(t)\nabla\omega_k(x), g_{j_m}(t)\nabla\omega_j(x)\Big)\\
=&M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(f(u_{mt}(t)), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&\int_\Omega f(u_{mt}(t))\frac{d}{dt}\left(u_m(t)\right)dx\\
=&\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(\hat{f}(u_m(t))\right)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mu_1 u_{mt}(t), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&\mu_1\|u_{mt}(t)\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mu_2 z_m(x,1,t), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))\\
=&\mu_2\int_\Omega z_m(x,1,t)u_{mt}(t)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))ds\\
=&-\int_0^t g(t-s)(\nabla u_m(s), g'_{j_m}(t)\omega_j(x))ds\\
=&-\int_0^t g(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_{mt}(t))ds.
\end{aligned}
$$

Finalement l'équation (2.9) s'écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_{mt}(t)\|^2\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Delta u_m(t)\|^2\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)\\
&+\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(\hat{f}(u_m(t))\right)dx+\mu_1\|u_{mt}(t)\|^2+\mu_2\int_\Omega z_m(x,1,t)u_{mt}(t)dx\\
&-\int_0^t g(t-s)(\nabla u_m(s),\nabla u_{mt}(t))ds=0.
\end{aligned}$$

La preuve du Lemme 2.1 est ainsi achevée. □

En conciliant les résultats du Lemme 0.1 et du Lemme 2.1, nous pouvons en déduire aisément que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_{mt}(t)\|^2+\|\Delta u_m(t)\|^2+\|\hat{M}(\nabla u_m(t))\|^2+2\int_\Omega \hat{f}(u_m(t))dx\right)\\
&+\mu_1\|u_{mt}(t)\|^2+\mu_2\int_\Omega z_m(x,1,t)u_m(t)dx\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((g\circ\nabla u_m)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\\
=&\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_m)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u_m(t)\|^2.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Le résultat suivant concerne le terme retard.

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, on a*

$$\begin{aligned}
&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx\\
=&\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[z_m^2(x,1,s)-u_{mt}^2(s)\right]dxds-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1(z_0^m)^2(x,\rho)d\rho dx.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Démonstration. On multiplie d'abord la seconde équation de (2.5) par $h_{jm}(t)$ et on somme pour j allant de 1 à m. En conservant la notation de sommation d'Einstein, on a

$$(\tau z_{mt}(x,\rho,t),h_{j_m}(t)\phi_j(x,\rho))+(z_{m\rho}(x,\rho,t),h_{j_m}(t)\phi_j(x,\rho))=0,$$

ou encore

$$\tau(z_{mt}(x,\rho,t),z_m(x,\rho,t))+(z_{m\rho}(x,\rho,t),z_m(x,\rho,t))=0.$$

Multipliant la dernière équation par $\frac{\xi}{\tau}$, on déduit que

$$\xi(z_{mt}(x,\rho,t),z_m(x,\rho,t))+\frac{\xi}{\tau}(z_{m\rho}(x,\rho,t),z_m(x,\rho,t))=0.$$

Intégrant ensuite le membre de gauche sur $(0,t)\times(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\xi\int_0^t\int_\Omega\int_0^1 z_{mt}(x,\rho,s)z_m(x,\rho,s)d\rho dxds\\
&\quad+\frac{\xi}{\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1 z_{m\rho}(x,\rho,s)z_m(x,\rho,s)d\rho dxds\\
=&\xi\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\frac{1}{2}\frac{d}{dt}z_m^2(x,\rho,s)d\rho dxds\\
&\quad+\frac{\xi}{\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}z_m^2(x,\rho,s)d\rho dxds\\
=&\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1\left[z_m^2(x,\rho,t)-z_m^2(x,\rho,0)\right]d\rho dx\\
&\quad+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[z_m^2(x,1,s)-z_m^2(x,0,s)\right]dxds.
\end{aligned}$$

Ainsi, en remarquant que

$$z_m(x,\rho,0)=z_0^m,\quad z_m(x,0,s)=u_{mt}(s),$$

on a

$$\begin{aligned}
&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1(z_0^m)^2(x,\rho)d\rho dx\\
=&\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[z_m^2(x,1,s)-u_m^2(x,s)\right]dxds.
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2.2. □

Pour la suite, on pose

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_m(t):=&\frac{1}{2}\Big(\|u_{mt}(t)\|^2+\|\Delta u_m(t)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)+2\int_\Omega\hat{f}(u_m(t))dx\\
&+g\circ\nabla u_m(t)-\int_0^t g(s)ds\|\nabla u_m(t)\|^2\Big)+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

On remarque que, d'après (2.10),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_{mt}(t)\|^2+\|\Delta u_m(t)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)+2\int_\Omega\hat{f}(u_m(t))dx\\
&\quad+(g\circ\nabla u_m)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\nabla u_m(t)\|^2\Big)\\
=&-\mu_1\|u_{mt}(t)\|^2-\mu_2\int_\Omega z_m(x,1,t)u_m(t)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_m)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u_m(t)\|^2.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

En l'intégrant de 0 à t, le membre de gauche de la précédente équation devient

$$\begin{aligned}&\mathscr{E}_m(t)-\mathscr{E}_m(0)-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,0)d\rho dx\\ =&\mathscr{E}_m(t)-\mathscr{E}_m(0)-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 (z_0^m)^2(x,\rho)d\rho dx.\end{aligned}$$

En intégrant, ensuite, le membre de droite de la même équation par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}&-\mu_1\int_0^t\|u_{mt}(s)\|^2ds-\mu_2\int_0^t\int_\Omega z_m(x,1,s)u_{mt}(s)dxds\\ &+\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_m)(s)ds-\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\nabla u_m(s)\|^2ds.\end{aligned}$$

Mais, d'après le Lemme 2.2

$$\begin{aligned}&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_0^{2m}(x,\rho)d\rho dx\\ =&\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[z_m^2(x,1,s)-u_{mt}^2(s)\right]dxds.\end{aligned}$$

Il en découle alors que

$$\begin{aligned}&\mathscr{E}_m(t)-\mathscr{E}_m(0)+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega z_m^2(x,1,s)-\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega u_{mt}^2(s)dxds\\ =&-\mu_1\int_0^t\|u_{mt}(s)\|^2ds-\mu_2\int_0^t\int_\Omega z_m(x,1,s)u_{mt}(s)dxds\\ &+\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_m)(s)ds-\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\nabla u_m(s)\|^2ds,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}&\mathscr{E}_m(t)+\left(\mu_1-\frac{\xi}{2\tau}\right)\int_0^t\|u_{mt}(s)\|^2ds+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega z_m^2(x,1,s)ds\\ &+\mu_2\int_0^t\int_\Omega z_m(x,1,s)u_{mt}(s)dxds\\ &-\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_m)(s)ds+\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\nabla u_m(s)\|^2ds\\ =&\mathscr{E}_m(0).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Afin d'établir des estimations sur la solution, on propose la disjonction de cas suivante.

Cas 1 On suppose que $\mu_2<\mu_1$.

En utilisant l'inégalité de Young (1.5), on déduit que

$$\begin{aligned}&\mu_2\int_0^t\int_\Omega z_m(x,1,s)u_{mt}(s)dxds\\ \geq&-\frac{\mu_2}{2}\int_0^t\int_\Omega z_m^2(x,1,s)dxds-\frac{\mu_2}{2}\int_0^t\int_\Omega u_{mt}^2(s)dxds,\end{aligned}\tag{2.15}$$

qui, conjugué avec (2.14), implique que

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{E}_m(t) + \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^t \|u_{mt}(s)\|^2 ds \\
&+ \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^t \int_\Omega z_m^2(x,1,s)dxds \\
&- \int_0^t \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u_m)(s)ds + \int_0^t \frac{1}{2} g(s)\|\nabla u_m(s)\|^2 ds \\
\leq &\mathscr{E}_m(0).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

En vertu de l'hypothèse (0.16), on conclut l'existence de deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{E}_m(t) + c_1 \int_0^t \|u_{mt}(s)\|^2 ds + c_2 \int_0^t \int_\Omega z_m^2(x,1,s)dxds \\
&- \int_0^t \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u_m)(s)ds + \int_0^t \frac{1}{2} g(s)\|\nabla u_m(s)\|^2 ds \\
\leq &\mathscr{E}_m(0).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Cas 2 On suppose que $\mu_1 = \mu_2$.

Prenant $\xi = \tau\mu_1 = \tau\mu_2$ et d'après (2.14), nous déduisons immédiatement que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_m(t) - \int_0^t \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u_m)(s)ds + \int_0^t \frac{1}{2} g(s)\|\nabla u_m(s)\|^2 ds \\
\leq \&mathcalE_m(0).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Dans les deux cas, d'après (0.11), on remarque qu'il existe une constante positive $C > 0$ indépendante de m telle que

$$
\mathscr{E}_m(t) \leq C, \quad \forall t \geq 0.
$$

D'autre part, l'hypothèse (0.10) entraîne que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla u_m(t)\|^2 \\
\geq &\frac{1}{2}\left(1 - \lambda \int_0^{+\infty} g(s)ds\right)\|\Delta u_m(t)\|^2 \\
= &\frac{l}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2, \quad l > 0,
\end{aligned}
$$

alors que l'hypothèse (0.15) implique

$$
\int_\Omega \hat{f}(u_m(t))dx \geq 0.
$$

On peut, ainsi, déduire facilement que

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}(t)\|^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) + \frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq C, \quad \xi > 0,$$

ou encore

$$\|u_{mt}(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2 + \hat{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) + \int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq C', \tag{2.19}$$

où

$$C' = \frac{C}{\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{l}{2}, \frac{\xi}{2}\right\}}.$$

Puisque C' est indépendante de m, on obtient, $t_m = T$, pour tout $T > 0$.

2.5 Passage à la limite

Afin de pouvoir appliquer une procédure de passage à la limite dans la formulation (2.5) du problème approché et ainsi obtenir une solution faible à l'équation de départ, nous devons établir des résultats de convergence (dans un certain sens) de la solution approchée. Dans cette perspective, nous allons recourir aux théorèmes de compacité rappelés au chapitre précédent.

D'après la première estimation (2.19), on remarque que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)}\|\Delta u_m(t)\| \leq \sqrt{C'},$$

$$\|u_{mt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)}\|u_{mt}(t)\| \leq \sqrt{C'},$$

$$\|z_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times(0,1)))} = \sup_{t\in(0,T)}\int_\Omega\int_0^1 z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq \sqrt{C'}.$$

Autrement dit,

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$(u_{mt})_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times(0,1))). \tag{2.22}$$

Ainsi, en vertu du Corollaire 1.1 et de l'unicité de la limite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, on déduit l'existence de fonctions u, u_t et z telles que

$$\begin{aligned}
&u_m \rightharpoonup^* u \text{ dans } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\\
&u_{mt} \rightharpoonup^* u_t \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&z_m \rightharpoonup^* z \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times(0,1))).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

D'après (2.20)-(2.21), on conclut également que,

$$\begin{aligned}
&(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\\
&(u_{mt})_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, en vertu du Corollaire 1.2, que

$$\begin{aligned}
&u_m \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\\
&u_{mt} \rightharpoonup u_t \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 1.3 d'Aubin-Lions-Simon, on déduit que, pour tout $T>0$,

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ converge fortement vers } u \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.24}$$

Enfin, en utilisant le Lemme 1.4 de Kim, on convient, a fortiori, que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ converge fortement vers } u \text{ dans } C(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.25}$$

On peut donc opérer un passage à la limite dans le problème approché (2.5)-(2.6) afin d'obtenir une solution faible du problème (0.18)-(0.20).

2.6 Conformité aux conditions initiales

Afin de pouvoir assurer la pertinence de la solution, il faut vérifier que celle-ci satisfait bien aux conditions initiales du problème de départ.

D'abord, on affirme que $u(0)=u_0$.

En effet, on remarque, d'après la convergence (2.25), que

$$u_m(0) \text{ converge simplement vers } u(0),$$

de plus, en utilisant (2.7), on déduit que

$$u_m(0) \text{ converge simplement vers } u_0.$$

On conclut par unicité de la limite.

On définit ensuite une fonction test θ satisfaisant

$$\theta \in H^1(0,T), \quad \theta(0) = 1, \quad \theta(T) = 0.$$

D'une part, en multipliant la première équation de (2.5) par $\theta(t)$ et intégrant le résultat sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_{mtt}(t), \omega_j(x))\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (\Delta u_m(t), \Delta\omega_j(x))\theta(t)dt + \int_0^T \left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\nabla u_m(t), \nabla\omega_j(x)\right)\theta(t)dt \\
&- \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla\omega_j(x))\theta(t)dsdt + \int_0^T \mu_1(u_{mt}(t), \omega_j(x))\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T \mu_2(z_m(x,1,t), \omega_j(x))\theta(t)dt + \int_0^T (f(u_m(t)), \omega_j(x))\theta(t)dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Comme $\theta(0) = 1, \theta(T) = 0$ et $u_{mt}(0) = u_1^m$, en procédant à une intégration par parties, le premier terme de l'équation précédente s'écrit

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_{mtt}(t), \omega_j(x))\theta(t)dt \\
=&\int_0^T \frac{d}{dt}\left((u_{mt}(t), \omega_j(x)\theta(t))\right)dt - \int_0^T (u_{mt}(t), \omega_j(x)\theta_t(t))dt \\
=&(u_{mt}(T), \omega_j(x)\theta(T)) - (u_{mt}(0), \omega_j(x)\theta(0)) - \int_0^T (u_{mt}(t), \omega_j(x)\theta_t(t))dt \\
=&-(u_1^m, \omega_j(x)) - \int_0^T (u_{mt}(t), \omega_j(x)\theta_t(t))dt.
\end{aligned}$$

Par suite, l'équation (2.26) devient

$$\begin{aligned}
&-(u_1^m, \omega_j(x)) - \int_0^T (u_{mt}(t), \omega_j(x))\theta_t(t)dt \\
&+ \int_0^T (\Delta u_m(t), \Delta\omega_j(x))\theta(t)dt + \int_0^T \left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\nabla u_m(t), \nabla\omega_j(x)\right)\theta(t)dt \\
&- \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla\omega_j(x))\theta(t)dsdt + \int_0^T \mu_1(u_{mt}(t), \omega_j(x))\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T \mu_2(z_m(x,1,t), \omega_j(x))\theta(t)dt + \int_0^T (f(u_m(t)), \omega_j(x))\theta(t)dt = 0.
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $m \to \infty$, on déduit que

$$
\begin{aligned}
&-(u_1,\omega_j(x))-\int_0^T(u_t(t),\omega_j(x)\theta_t(t)dt\\
&+\int_0^T(\Delta u(t),\Delta\omega_j(x))\theta(t)dt+\int_0^T\left(M(\|\nabla u(t)\|^2)\nabla u(t),\nabla\omega_j(x)\right)\theta(t)dt\\
&-\int_0^T\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s),\nabla\omega_j(x))\theta(t)dsdt+\int_0^T\mu_1(u_t(t),\omega_j(x))\theta(t)dt\\
&+\int_0^T\mu_2(z(x,1,t),\omega_j(x))\theta(t)dt+\int_0^T(f(u(t),\omega_j(x))\theta(t)dt=0.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

D'autre part, en multipliant la première équation de (0.21) par $\theta(t)$, en prenant $\omega=\omega_j$ et intégrant le résultat sur $[0,T]$, il découle que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T(u_{tt}(t),\omega_j(x))\theta(t)dt-\int_0^T(u_t(t),\omega_j(x))\theta_t(t)dt\\
&+\int_0^T(\Delta u(t),\Delta\omega_j(x))\theta(t)dt\int_0^T\left(M(\|\nabla u(t)\|^2)\nabla u(t),\nabla\omega_j(x)\right)\theta(t)dt\\
&-\int_0^T\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s),\nabla\omega_j(x))\theta(t)dsdt+\int_0^T\mu_1(u_t(t),\omega_j(x))\theta(t)dt\\
&+\int_0^T\mu_2(z(x,1,t),\omega_j(x))\theta(t)dt+\int_0^T(f(u(t),\omega_j(x))\theta(t)dt=0.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Aussi, comme $\theta(0)=1,\theta(T)=0$ et $u_t(0)=u_1$, en procédant à une intégration par parties, le premier terme de l'équation précédente s'écrit

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T(u_{tt}(t),\omega_j(x))\theta(t)dt\\
=&\int_0^T\frac{d}{dt}\left((u_t(t),\omega_j(x)\theta(t))\right)dt-\int_0^T(u_t(t),\omega_j(x)\theta_t(t))dt\\
=&(u_{mt}(T),\omega_j(x)\theta(t))-(u_t(0),\omega_j(x)\theta(0))-\int_0^T(u_{mt}(t),\omega_j(x)\theta_t(t))dt\\
=&-(u_t(0),\omega_j(x))-\int_0^T(u_t(t),\omega_j(x)\theta_t(t))dt,
\end{aligned}
$$

et l'équation (2.28) devient

$$
\begin{aligned}
&-(u_t(0),\omega_j(x))-\int_0^T(u_t(t),\omega_j(x))\theta_t(t)dt\\
&+\int_0^T(\Delta u(t),\Delta\omega_j(x)\theta(t)dt+\int_0^T\left(M(\|\nabla u(t)\|^2)\nabla u(t),\nabla\omega_j(x)\right)\theta(t)dt\\
&-\int_0^T\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s),\nabla\omega_j(x))\theta(t)dsdt+\int_0^T\mu_1(u_t(t),\omega_j(x))\theta(t)dt\\
&+\int_0^T\mu_2(z(x,1,t),\omega_j(x))\theta(t)dt+\int_0^T(f(u(t)),\omega_j(x))\theta(t)dt=0.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

En combinant les équations (2.27) et (2.29), on conclut que

$$u_t(0)=u_1.$$

De plus, d'après (2.23), pour tout j, lorsque $m \to \infty$, nous avons

$$\int_\Omega z_m(x,\rho,t)\omega_j(x)dx \rightharpoonup \int_\Omega z(x,\rho,t)\omega_j(x)dx.$$

En rappelant que $z(x,\rho,0) = u_t(x,-\rho\tau)$,

$$\int_\Omega z_m(x,\rho,0)\omega_j(x)dx \rightharpoonup \int_\Omega u_t(x,-\rho\tau)\omega_j(x)dx.$$

Or, d'après (2.7),

$$z_0^m = z_m(x,\rho,0) \text{ converge fortement (et donc faiblement) vers } h_0(x,-\rho\tau),$$

ce qui donne, par unicité de la limite faible,

$$u_t(x,-\rho\tau) = h_0(x,-\rho\tau), \quad \rho \in (0,1),$$

ou de manière équivalente

$$u_t(x,t-\tau) = h_0(x,t-\tau), \quad t \in (0,\tau).$$

Ce qui achève la preuve de l'énoncé 1 du Théorème 2.1.

La démonstration de l'existence globale de solutions plus régulières (énoncé 2) se fait en adaptant les mêmes arguments que ceux développés dans l'énoncé 1 au cas où l'on considère des données plus régulières. Il s'agit principalement d'établir une deuxième estimation sur la solution approchée. C'est l'objet de la section suivante.

2.7 Deuxième estimation

Le résultat suivant a trait à la régularité des solutions faibles dont l'existence a été précédemment établie. On considère désormais les données initiales

$$u_0 \in H^3_{\partial\Omega}(\Omega), \quad u_1 \in H^1_0(\Omega), \quad h_0 \in H^1(\Omega \times (0,1)).$$

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, et notamment l'hypothèse (2.2), une* *solution régulière du problème approché (2.5) vérifie*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 + \|\nabla\Delta u_m(t)\|^2 + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\right)\\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2 - \int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx\\
&+\mu_1\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 + \mu_2\int_\Omega \nabla z_m(x,1,t)\nabla u_{mt}(t)dx\\
&-\int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), \Delta u_{mt}(t))ds = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Démonstration. Grâce au choix de la base de Galerkin, on peut remplacer ω_j par $-\Delta\omega_j$ dans la première équation de (2.5). En multipliant l'équation obtenue par $g'_{j_m}(t)$ et en sommant sur j allant de 1 à m, on obtient

$$\begin{aligned}
&-(u_{mtt}(t), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x)) - (\Delta^2 u_m(t), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x))\\
&+\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x)\right) - (f(u_m(t)), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x))\\
&-(\mu_1 u_{mt}(t), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x)) - (\mu_2 z_m(x,1,t), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x))\\
&-\int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), g'_{j_m}(t)\Delta\omega_j(x))ds = 0,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
&-(u_{mtt}(t), \Delta u_{mt}(t)) - (\Delta^2 u_m(t), \Delta u_{mt}(t))\\
&+\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t), \Delta u_{mt}(t)\right) - (f(u_m(t)), \Delta u_{mt}(t))\\
&-(\mu_1 u_{mt}(t), \Delta u_{mt}(t)) - (\mu_2 z_m(x,1,t), \Delta u_{mt}(t))\\
&-\int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), \Delta u_{mt}(t))ds = 0,
\end{aligned}$$

ou encore, en utilisant la formule de Green (1.8), à

$$\begin{aligned}
&(\nabla u_{mtt}(t), \nabla u_{mt}(t)) + (\Delta\nabla u_m(t), \Delta\nabla u_{mt}(t))\\
&+\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Delta u_m(t), \Delta u_{mt}(t)\right) - (f(u_m(t)), \Delta u_{mt}(t))\\
&+\mu_1(\nabla u_{mt}(t), \nabla u_{mt}(t)) + \mu_2(\nabla z_m(x,1,t), \nabla u_{mt}(t))\\
&-\int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), \Delta u_{mt}(t))ds = 0.
\end{aligned}$$

En adoptant une approche similaire au Lemme 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta u_m(t)\|^2 + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2 \\
&- \int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx + \mu_1\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 \\
&+ \mu_2\int_\Omega \nabla z_m(x,1,t)\nabla u_{mt}(t)dx - \int_0^t g(t-s)(\Delta u_m(s), \Delta u_{mt}(t))ds = 0.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
&M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2 \\
=&\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\right) - \frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2,
\end{aligned}$$

on achève la preuve du Lemme 2.3. □

En vertu du Lemme 2.3 et d'après la Remarque 0.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 + \|\nabla\Delta u_m(t)\|^2 + \left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\right)\right) \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2 - \int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx \\
&+ \mu_1\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 + \mu_2\int_\Omega \nabla z_m(x,1,t)\nabla u_{mt}(t)dx \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(g\circ\Delta u_m\right)(t) - \int_0^t g(s)ds\|\Delta u_m(t)\|^2\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u_m\right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u_m(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

On donne, ci-dessous, un résultat similaire au Lemme 2.2.

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, on a*

$$\begin{aligned}
&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 \nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx \\
=&\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[\nabla z_m^2(x,1,s) - \nabla u_{mt}^2(s)\right]dxds - \frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1(\nabla z_0^m)^2(x,\rho)d\rho dx.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Démonstration. En remplaçant ϕ_j par $-\Delta\phi_j$ dans la seconde équation de (2.5), en multipliant l'équation obtenue par $h_{j_m}(t)$ et en sommant sur j allant de 1 à m, on obtient

$$-(\tau z_{mt}(x,\rho,t), h_{j_m}(t)\Delta\phi_j(x,\rho)) - (z_{m\rho}(x,\rho,t), h_{j_m}(t)\Delta\phi_j(x,\rho)) = 0,$$

ou encore

$$-(\tau z_{mt}(x,\rho,t),\Delta z_{mt}(x,\rho,t))-(z_{m\rho}(x,\rho,t),\Delta z_{mt}(x,\rho,t))=0.$$

Multipliant la dernière équation par $\frac{\xi}{\tau}$ et utilisant la formule de Green (1.8), on déduit que

$$\xi(\nabla z_{mt}(x,\rho,t),\nabla z_m(x,\rho,t))+\frac{\xi}{\tau}(\nabla z_{m\rho}(x,\rho,t),\nabla z_m(x,\rho,t))=0.$$

Intégrant ensuite le membre de gauche sur $(0,t)\times(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\xi\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\nabla z_{mt}(x,\rho,s)\nabla z_m(x,\rho,s)d\rho dxds\\
&\quad+\frac{\xi}{\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\nabla z_{m\rho}(x,\rho,s)\nabla z_m(x,\rho,s)d\rho dxds\\
=&\xi\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nabla z_m^2(x,\rho,s)d\rho dxds\\
&\quad+\frac{\xi}{\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}\nabla z_m^2(x,\rho,s)d\rho dxds\\
=&\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1\left[\nabla z_m^2(x,\rho,t)-\nabla z_m^2(x,\rho,0)\right]d\rho dx\\
&\quad+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[\nabla z_m^2(x,1,s)-\nabla z_m^2(x,0,s)\right]dxds.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1\nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1\nabla z_m^2(x,\rho,0)d\rho dx\\
=&\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[\nabla z_m^2(x,1,s)-\nabla z_m^2(x,0,s)\right]dxds.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$z_m(x,\rho,0)=z_0^m,\quad z_m(x,0,s)=u_{mt}(s),$$

on achève la démonstration du Lemme 2.4. □

Il découle de l'équation (2.32) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\|\nabla\Delta u_m(t)\|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\\
&+(g\circ\Delta u_m)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\Delta u_m(t)\|^2\Big)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2\\
&-\int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx+\mu_1\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\mu_2\int_\Omega\nabla z_m(x,1,t)\nabla u_{mt}(t)dx\\
=&\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u_m)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u_m(t)\|^2.
\end{aligned}\tag{2.34}$$

Pour la suite, on pose

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_m(t) :=&\frac{1}{2}\Big(\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\|\nabla\Delta u_m(t)\|^2+M(\|\nabla u_m\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\\&+\left(g\circ\Delta u_m\right)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\Delta u_m(t)\|^2\Big)+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1\nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx.\end{aligned}\tag{2.35}$$

On voit, d'après (2.34), que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\|\nabla\Delta u_m(t)\|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\\&+\left(g\circ\Delta u_m\right)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\Delta u_m(t)\|^2\Big)\\=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2+\int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx\\&-\mu_1\|\nabla u_{mt}(t)\|^2-\mu_2\int_\Omega\nabla z_m(x,1,t)\nabla u_{mt}(t)dx\\&+\frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u_m\right)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u_m(t)\|^2.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Nous allons majorer les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (2.36). Concernant le premier terme, les inégalités de Cauchy-Schwarz (1.2), de Young (1.5) et la formule de Green (1.8) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2\\=&\frac{d}{dt}M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\left(\nabla u_m(t),\nabla u_{mt}(t)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2\\=&-\frac{d}{dt}M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\left(\Delta u_m(t),u_{mt}(t)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2\\\leq&C_1\|\Delta u_m(t)\|\|u_{mt}(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2\\\leq&\frac{C_1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2\|\Delta u_m(t)\|^2+\frac{C_1}{2}\|u_{mt}(t)\|^2\|\Delta u_m(t)\|^2\\=&\frac{C_1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^4+\frac{C_1}{2}\|u_{mt}(t)\|^2\|\Delta u_m(t)\|^2\\\leq&\frac{C_1C'^2}{2}+\frac{C_1C'^2}{2}=C_2,\end{aligned}$$

où les constantes C_1 et C' proviennent respectivement de la régularité (de classe C^1) de la fonction M ainsi que de la première estimation (2.19).

En ce qui concerne le deuxième terme du second membre de (2.36), les inégalités de Hölder (1.1), de Young (1.5) et la formule de Green (1.8) nous donnent

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx\\
=&-\int_\Omega \nabla f(u_m(t))\nabla u_{mt}(t)dx+\int_{\partial\Omega} f(u_m(t))\frac{\partial u_{mt}}{\partial \nu}(t)dx\\
=&-\int_\Omega \nabla f(u_m(t))\nabla u_{mt}(t)dx\\
\leq& C_f\int_\Omega (1+|u_m(t)|^p)|\nabla u_{mt}(t)|dx\\
=& C_f\int_\Omega |\nabla u_{mt}(t)|dx+C_f\int_\Omega |u_m(t)|^p|\nabla u_{mt}(t)|dx\\
\leq& \epsilon C_f^2|\Omega|+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\epsilon C_f^2\int_\Omega |u_m(t)|^{2p}dx+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2\\
\leq& \epsilon C_f^2|\Omega|+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\epsilon C_f^2\|u_m(t)\|_{2p}^{2p}+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2\\
\leq& \epsilon C_f^2|\Omega|+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\epsilon C_f^2C_3^{2p}\|\Delta u_m(t)\|^{2p}+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2\\
\leq& \epsilon C_f^2|\Omega|+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2+\epsilon C_f^2C_3^{2p}C'^p+\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2\\
\leq& \epsilon(C_f^2|\Omega|+C_f^2C_3^{2p}C'^p)+\frac{1}{4\epsilon}\mathscr{F}_m(t)\\
=& \epsilon C_4+C_5\mathscr{F}_m(t),\quad C_4=C_f^2|\Omega|+C_f^2C_3^{2p}C'^p, C_5=\frac{1}{4\epsilon},
\end{aligned}
$$

où les constantes C_f et C_3 sont respectivement données par l'hypothèse (2.2) et l'injection de $H^2(\Omega)$ dans L^{2p}, par l'intermédiaire de $L^{2(p+1)}$.

On peut ainsi déduire des deux estimations précédentes que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right)\|\Delta u_m(t)\|^2+\int_\Omega f(u_m(t))\Delta u_{mt}(t)dx\\
\leq& C_6+C_5\mathscr{F}_m(t),\quad C_6=C_2+\epsilon C_4.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

En l'intégrant de 0 à t, le membre de gauche de l'équation (2.36) devient

$$
\mathscr{F}_m(t)-\mathscr{F}_m(0)-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 \nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1(\nabla z_0^m)^2(x,\rho)d\rho dx.
$$

En intégrant, ensuite, le membre de droite de la même équation par rapport à t, l'estimation (2.37) nous permet de le majorer par

$$
\begin{aligned}
&C_5\int_0^t \mathscr{F}_m(t)ds+C_6\int_0^t ds-\mu_1\int_0^t\|\nabla u_{mt}(s)\|^2ds-\mu_2\int_0^t\int_\Omega \nabla z_m(x,1,s)\nabla u_{mt}(s)dxds\\
&+\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u_m)(s)ds-\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\Delta u_m(s)\|^2ds.
\end{aligned}
$$

Mais, d'après le Lemme 2.4

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 \nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 \nabla z_0^{2m}(x,\rho)d\rho dx\\
=&\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\left[\nabla z_m^2(x,1,s)-\nabla u_{mt}^2(s)\right]dxds.
\end{aligned}
$$

Il en découle alors que

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_m(t)-\mathscr{F}_m(0)+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega \nabla z_m^2(x,1,s)dxds-\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega \nabla u_{mt}^2(s)dxds\\
\leq& C_5\int_0^t \mathscr{F}_m(t)ds+TC_6-\mu_1\int_0^t\|\nabla u_{mt}(s)\|^2ds-\mu_2\int_0^t\int_\Omega \nabla z_m(x,1,s)\nabla u_{mt}(s)dxds\\
&+\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u_m)(s)ds-\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\Delta u_m(s)\|^2ds,
\end{aligned}
$$

et puisque

$$
\mu_2\int_\Omega \nabla z_m(x,1,t)\nabla u_{mt}(t)dx\geq-\frac{\mu_2}{2}\int_\Omega \nabla z_m^2(x,1,t)dx-\frac{\mu_2}{2}\|\nabla u_{mt}(t)\|^2,
$$

on déduit que, si $\mu_2<\mu_1$, on a

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_m(t)+\left(\mu_1-\frac{\xi}{2\tau}-\frac{\mu_2}{2}\right)\int_0^t\|\nabla u_{mt}(s)\|^2ds+\left(\frac{\xi}{2\tau}-\frac{\mu_2}{2}\right)\int_0^t\int_\Omega \nabla z_m^2(x,1,s)\\
&-\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u_m)(s)ds+\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\Delta u_m(s)\|^2ds\\
\leq&\mathscr{F}_m(0)+C_5\int_0^t \mathscr{F}_m(t)ds+TC_6,
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

et si $\mu_2=\mu_1$, en prenant $\xi=\tau\mu_1=\tau\mu_2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_m(t)-\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u_m)(s)ds+\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\Delta u_m(s)\|^2ds\\
\leq&\mathscr{F}_m(0)+C_5\int_0^t \mathscr{F}_m(t)ds+TC_6.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Dans les deux cas, en vertu de l'hypothèse (0.16), on conclut l'existence de deux constantes $c_1\geq 0$ et $c_2\geq 0$ telles que

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_m(t)+c_1\int_0^t\|\nabla u_{mt}(s)\|^2ds+c_2\int_0^t\int_\Omega \nabla z_m^2(x,1,s)dxds\\
&-\int_0^t\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u_m)(s)ds+\int_0^t\frac{1}{2}g(s)\|\Delta u_m(s)\|^2ds\\
\leq&\mathscr{F}_m(0)+C_5\int_0^t \mathscr{F}_m(t)ds+TC_6\\
\leq&C_7+C_5\int_0^t \mathscr{F}_m(t)ds,\quad C_7=\mathscr{F}_m(0)+TC_6.
\end{aligned}
$$

ce qui donne, en utilisant le Lemme 1.7 de Grönwall,

$$\mathscr{F}_m(t) \leq C_7 e^{TC_5} = C. \tag{2.40}$$

Cette dernière estimation entraîne que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u_{mt}(t)\|^2 + l\|\nabla\Delta u_m(t)\|^2 + \hat{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) \\
&+ \int_\Omega \int_0^1 \nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq C.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Puisque C est indépendante de m, on obtient, $t_m = T$, pour tout $T > 0$.

D'après la deuxième estimation (2.41), on remarque que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^3_{\partial\Omega}(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)} \|\nabla\Delta u_m\| \leq \sqrt{\frac{C}{l}}, \\
&\|u_{mt}\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)} \|\nabla u_{mt}\| \leq \sqrt{C}, \\
&\|z_m\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega\times(0,1)))} = \sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega \int_0^1 \nabla z_m^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq \sqrt{C}.
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(u_m) \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;H^3_{\partial\Omega}(\Omega)), \tag{2.42}$$

$$(u_{mt}) \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{2.43}$$

$$(z_m) \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega\times(0,1))). \tag{2.44}$$

Ainsi, en vertu du Corollaire 1.1, on déduit l'existence de

$$\begin{aligned}
&u_m \rightharpoonup^* u \text{ dans } L^\infty(0,T;H^3_{\partial\Omega}(\Omega)), \\
&u_{mt} \rightharpoonup^* u_t \text{ dans } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \\
&z_m \rightharpoonup^* z \text{ dans } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega\times(0,1))).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

D'après (2.42)-(2.43), on conclut également que,

$$\begin{aligned}
&(u_m) \text{ est bornée dans } L^2(0,T;H^3_{\partial\Omega}(\Omega)), \\
&(u_{mt}) \text{ est bornée dans } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, en appliquant le Corollaire 1.2, que

$$\begin{aligned}
&u_m \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T;H^3_{\partial\Omega}(\Omega)), \\
&u_{mt} \rightharpoonup u_t \text{ dans } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)).
\end{aligned}$$

On peut donc opérer un passage à la limite dans le problème approché (2.5)-(2.6) afin d'obtenir une solution faible au problème (0.18)-(0.20) d'une plus forte régularité, vérifiant

$$\begin{aligned} &u \in L^{\infty}(0, T, H^3(\Omega)), \\ &u_t \in L^{\infty}(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.46}$$

On peut montrer que cette solution vérifie les conditions initiales en adaptant la démarche vue dans la section 2.6 de ce chapitre.

La section suivante concerne la dépendance continue des solutions obtenues par rapport aux données initiales.

2.8 Continuité par rapport aux données et unicité

Tout d'abord, nous traitons la continuité, relative aux données, des solutions régulières du problème (0.18)-(0.20).

Soient donc

$$(u(t), u_t(t), z_1(x, \rho, t)) \text{ et } (v(t), v_t(t), z_2(x, \rho, t))$$

deux solutions globales du problème (0.18)-(0.20) munies des données initiales respectives

$$(u_0, u_1, h_{01}) \text{ et } (v_0, v_1, h_{02}).$$

On pose

$$\omega(t) := u(t) - v(t) \text{ et } \chi(x, \rho, t) := z_1(x, \rho, t) - z_2(x, \rho, t).$$

Alors, $(\omega(t), \chi(x, \rho, t))$ vérifie

$$\begin{aligned} &\omega_{tt}(t) + \Delta^2 \omega - \left(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) - M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t)\right) \\ &+ \int_0^t g(t-s)\Delta\omega(s)ds + \mu_1 \omega_t(t) \\ &+ \mu_2 \chi(x, 1, t) + f(u(t)) - f(v(t)) = 0, \\ &\tau \chi_t(x, \rho, t) + \chi_\rho(x, \rho, t) = 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

avec les données initiales

$$\omega(x, 0) = \omega_0, \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1, \quad \chi(x, \rho, 0) = \chi_0 = h_{01} - h_{02} \tag{2.48}$$

et les conditions aux limites

$$\omega(x,t) = \Delta\omega(x,t) = 0, \text{ dans } \partial\Omega. \tag{2.49}$$

Le lemme suivant permet d'établir la continuité de la solution par rapport aux données.

Lemme 2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, la fonction ω définie précédemment vérifie*

$$\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \leq \frac{e^{Ct}}{l}\mathscr{E}(0), \tag{2.50}$$

où C est une constante positive, l vérifie l'hypothèse (0.10) et la fonctionnelle $\mathscr{E}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(t) =& \|\omega_t(t)\|^2 + \|\Delta\omega(t)\|^2 + (g\circ\nabla\omega)(t) \\ & - \int_0^t g(s)ds\|\nabla\omega(t)\|^2 + \frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 \chi^2(x,\rho,t)d\rho dx. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (2.47) par ω_t, on a

$$\begin{aligned} &(\omega_{tt}(t),\omega_t(t)) + (\Delta^2 u(t),\omega_t(t)) - (M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) - M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t),\omega_t(t)) \\ &+ (f(u(t)) - f(v(t)),\omega_t(t)) + \int_0^t g(t-s)(\Delta\omega(s),\omega_t(t))ds \\ &+ (\mu_1\omega_t(t),\omega_t(t)) + (\mu_2\chi(x,1,t),\omega_t(t)) = 0, \end{aligned} \tag{2.52}$$

En adoptant une approche similaire à celle du Lemme 2.1, on peut écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\Delta\omega(t)\|^2 + (g\circ\nabla\omega)(t) - \int_0^t g(s)ds\|\nabla\omega(t)\|^2\right) \\ &- (M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) - M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t),\omega_t(t)) \\ &+ \mu_1\|\omega(t)\|^2 + \mu_2\int_\Omega \chi(x,1,t)\omega_t(t)dx \\ &+ \int_\Omega (f(u(t)) - f(v(t)))\,\omega_t(t)dx \\ &- \frac{1}{2}(g'\circ\nabla\omega)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\omega(t)\|^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega_t(t)\|^2+\|\Delta\omega(t)\|^2+(g\circ\nabla\omega)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\nabla\omega(t)\|^2\right)\\
&+\mu_1\|\omega(t)\|^2-\frac{1}{2}(g'\circ\nabla\omega)(t)+\frac{1}{2}g(t)\|\nabla\omega(t)\|^2\\
\leq&\left|(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t)-M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t),\omega_t(t))\right|\\
&+\mu_2\int_\Omega|\chi(x,1,t)||\omega_t(t)|dx+\int_\Omega|f(u(t))-f(v(t))||\omega_t(t)|dx.
\end{aligned}$$

Puisque, d'après les hypothèses, $g(t)>0$ and $g'(t)<0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega_t(t)\|^2+\|\Delta\omega(t)\|^2+(g\circ\nabla\omega)(t)-\int_0^t g(s)ds\|\nabla\omega(t)\|^2\right)+\mu_1\|\omega(t)\|^2\\
\leq&\left|(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t)-M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t),\omega_t(t))\right|\\
+&\mu_2\int_\Omega|\chi(x,1,t)||\omega_t(t)|dx+\int_\Omega|f(u(t))-f(v(t))||\omega_t(t)|dx,
\end{aligned}\tag{2.53}$$

On se propose de majorer le membre de droite de la dernière inéquation.

Par le théorème des valeurs intermédiaires et l'inégalité de Hölder (1.1), on peut remarquer que

$$\begin{aligned}
&\left|\big(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t)-M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t),\omega_t(t)\big)\right|\\
&=\left|\int_\Omega\Big\{\big(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t)-M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta v(t)\big)\,\omega_t(t)\right.\\
&\left.+\big(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta v(t)-M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t)\big)\,\omega_t(t)\Big\}dx\right|\\
\leq&\int_\Omega M(\|\nabla u(t)\|^2)|\Delta\omega(t)||\omega_t(t)|dx\\
&+\int_\Omega|M'(\eta)|(\|\nabla u(t)\|^2-\|\nabla v(t)\|^2)||\Delta v(t)||\omega_t(t)|dx.
\end{aligned}\tag{2.54}$$

Or, d'après l'hypothèse (0.9), la fonction M est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et en particulier M et M' sont bornées sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}^+$, d'où, il existe une constante $C_1>0$ telle que

$$|M(\eta)|\leq C_1,\quad |M'(\eta)|\leq C_1.$$

De plus, on a

$$|(\|\nabla u(t)\|^2-\|\nabla v(t)\|^2)|=|(\|\nabla u(t)\|-\|\nabla v(t)\|)(\|\nabla u(t)\|+\|\nabla v(t)\|)|.$$

D'une part, comme $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, il est clair que

$$|(\|\nabla u(t)\| + \|\nabla v(t)\|)| \leq C_2, \quad C_2 > 0,$$

et d'autre part, puisque $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et d'après la deuxième inégalité triangulaire, on a la majoration

$$|(\|\nabla u(t)\| - \|\nabla v(t)\|)| \leq \|\nabla u(t) - \nabla v(t)\| = \|\nabla \omega(t)\|.$$

Par conséquent,

$$|(\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla v(t)\|^2)| \leq C_2 \|\nabla \omega(t)\|.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young (1.5), on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(\|\nabla u(t)\|^2)|\Delta \omega(t)||\omega_t(t)|dx \\
\leq & C_1 \int_\Omega |\Delta \omega(t)||\omega_t(t)|dx \\
\leq & \frac{C_1}{2} \left(\|\Delta \omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \right),
\end{aligned}$$

et puisque $v \in H^2(\Omega)$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle $\|\Delta v(t)\| \leq C_3$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |M'(\eta)|(\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla v(t)\|^2)||\Delta v(t)||\omega_t(t)|dx \\
\leq & C_1 C_2 \|\nabla \omega(t)\| \int_\Omega |\Delta v(t)||\omega_t(t)|dx \\
\leq & C_1 C_2 \|\nabla \omega(t)\| \|\Delta v(t)\| \|\omega_t(t)\| \\
\leq & \frac{C_1 C_2 C_3}{2} \left(\|\nabla \omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \right),
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
&\left| \left(M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) - M(\|\nabla v(t)\|^2)\Delta v(t), \omega_t(t) \right) \right| \\
\leq & \frac{C_1}{2} \left(\|\Delta \omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \right) + \frac{C_1 C_2 C_3}{2} \left(\|\Delta v(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \right) \\
\leq & C_4 \left(\|\Delta \omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \right), \quad C_4 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_1 C_2 C_3}{2}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Concernant le terme dépendant de f, on a, d'après l'hypothèse (0.13) et l'inégalité de

Hölder (1.1),

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(u(t))-f(v(t))||\omega_t(t)|dx\\
\leq & c_f\int_\Omega (1+|u(t)|^r+|v(t)|^r)|\omega(t)||\omega_t(t)|dx\\
\leq & c_f\|\omega(t)\|\|\omega_t(t)\|+c_f\||u(t)|^r\omega(t)\|\|\omega_t(t)\|+c_f\||v(t)|^r\omega(t)\|\|\omega_t(t)\|.
\end{aligned}
$$

Comme

$$
\frac{r}{2(r+1)}+\frac{1}{2(r+1)}+\frac{1}{2}=1,
$$

on a

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(u(t))-f(v(t))||\omega_t|dx\\
\leq & c_f\|1\|^r_{2(r+1)}\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\|\omega_t(t)\|+c_f\|u(t)\|^r_{2(r+1)}\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\|\omega_t\|\\
&+c_f\|v(t)\|^r_{2(r+1)}\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\|\omega_t(t)\|\\
\leq & c_f|\Omega|^{\frac{r}{2(r+1)}}\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\|\omega_t(t)\|+c_f\|u(t)\|^r_{2(r+1)}\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\|\omega_t(t)\|\\
&+c_f\|v(t)\|^r_{2(r+1)}\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\|\omega_t(t)\|.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

En vertu de l'injection continue $L^{2(r+1)}(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ et en utilisant le fait que

$$
\|\omega(t)\|\leq\sqrt{\lambda}c_\Omega\|\Delta\omega(t)\|,
$$

où λ est donnée par l'hypothèse (0.10) et c_Ω est la constante de Poincaré (1.7), on a déduit qu'il existe $c_1,c_2>0$ telles que

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|^r_{2(r+1)}\leq c_1\|u(t)\|^r\leq c_2,\\
&\|v(t)\|^r_{2(r+1)}\leq c_1\|v(t)\|^r\leq c_2,\\
&\|\omega(t)\|_{2(r+1)}\leq c_1\|\omega(t)\|\leq\sqrt{\lambda}c_1c_\Omega\|\Delta\omega(t)\|.
\end{aligned}
$$

Par suite, on déduit que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(u(t))-f(v(t))||\omega_t(t)|dx\\
\leq&\sqrt{\lambda}c_1c_\Omega c_f|\Omega|^{\frac{r}{2(r+1)}}\|\Delta\omega(t)\|\|\omega_t(t)\|+2\lambda c_\Omega c_2c_f\|\Delta\omega(t)\|\|\omega_t(t)\|\\
=&C_5\|\Delta\omega(t)\|\|\omega_t(t)\|,\quad C_5=\max\left\{\sqrt{\lambda}c_1c_\Omega c_f|\Omega|^{\frac{r}{2(r+1)}},2\lambda c_\Omega c_2c_f\right\}\\
\leq&\frac{C_5}{2}\left(\|\Delta\omega(t)\|^2+\|\omega_t(t)\|^2\right)\\
=&C_6\left(\|\Delta\omega(t)\|^2+\|\omega_t(t)\|^2\right),\quad C_6=\frac{C_5}{2}.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
&\mu_2 \int_\Omega |\chi(x,1,t)||\omega_t(t)|dx \\
\leq &\frac{\mu_2}{2} \int_\Omega \chi^2(x,1,t)dx + \frac{\mu_2}{2}\|\omega_t(t)\|^2.
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

En combinant (2.51)-(2.55), on remarque que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) - \frac{d}{dt}\frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 \chi^2(x,\rho,t)d\rho dx \\
&+ \left(\mu_1 - \frac{\mu_2}{2}\right)\|\omega_t(t)\|^2 - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega \chi^2(x,1,t)dx \\
\leq &(C_4 + C_6)(\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2).
\end{aligned}
$$

D'après l'équation (2.11) et comme $\chi = z_1 - z_2,$ et $\chi(x,0,s) = \omega_t(s)$, on a

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 \chi^2(x,\rho,t)d\rho dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 \chi_0^2(x,\rho)d\rho dx \\
= &\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t \int_\Omega \left[\chi^2(x,1,s) - \omega_t^2(s)\right] dxds,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 \chi^2(x,\rho,t)d\rho dx \\
= &\frac{\xi}{2\tau}\int_\Omega \left[\chi^2(x,1,t) - \omega_t^2(t)\right] dx,
\end{aligned}
$$

on en déduit que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) + \frac{\xi}{2\tau}\int_\Omega \left[\chi^2(x,1,t) - \omega_t^2(t)\right] dx \\
&+ \left(\mu_1 - \frac{\mu_2}{2}\right)\|\omega_t(t)\|^2 - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega \chi^2(x,1,t)dx \\
\leq &(C_4 + C_6)(\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2),
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) + \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right)\|\omega_t(t)\|^2 \\
&+ \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right)\int_\Omega \chi^2(x,1,t)dx \\
\leq &C_7(\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2), \quad C_7 = C_4 + C_6.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Il découle de l'hypothèse (0.16) que

$$
\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) \leq C_7(\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2),
$$

ce qui donne en intégrant par rapport à t,

$$\mathscr{E}(t) \leq \mathscr{E}(0) + C_7 \int_0^t \|\Delta\omega(s)\|^2 + \|\omega_t(s)\|^2 ds. \tag{2.60}$$

En outre, en vertu de l'hypothèse (0.10),

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t) \geq &\|\omega_t(t)\|^2 + l\|\Delta\omega(t)\|^2 + (g \circ \nabla\omega)(t) + \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 \chi^2(x,\rho,t) d\rho dx\\ \geq & l\left(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\Delta\omega(t)\|^2\right),\end{aligned}$$

et par suite, on obtient

$$\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \leq l\left(\mathscr{E}(0) + C_7 \int_0^t \|\Delta\omega(s)\|^2 + \|\omega_t(s)\|^2 ds\right). \tag{2.61}$$

Appliquant le Lemme 1.7 de Grönwall à l'estimation (2.61), nous déduisons finalement que

$$\|\Delta\omega(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|^2 \leq \frac{e^{C_8 t}}{l}\mathscr{E}(0), \quad C_8 = \frac{C_7}{l}. \tag{2.62}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(0) = &\|u_1(0) - v_1(0)\|^2 + \|\Delta u_0(0) - \Delta v_0(0)\|^2\\ &+ \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 (h_{01}(x,-\tau\rho) - h_{02}(x,-\tau\rho))^2 d\rho dx,\end{aligned}$$

on déduit que la solution du problème (0.18)-(0.20) dépend continûment de la donnée initiale. En particulier, on peut affirmer l'existence globale d'une unique solution régulière.

Le Lemme 2.5 est ainsi démontré. □

Nous pouvons, enfin, prouver la dépendance continue et l'unicité des solutions faibles (énoncé 3) en utilisant des arguments de densité (voir par exemple, Cavalcanti et al.[5]) ce qui peut aussi être trouvé dans Lions [19, Chapitre 1, Théorème 1.2] en utilisant une méthode de régularisation et dans [25] en utilisant les fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.1.

CHAPITRE

3

DÉCROISSANCE GÉNÉRALE DE L'ÉNERGIE

On étudie, dans ce chapitre, le comportement asymptotique de la solution obtenue au chapitre précédent. Plus précisément, notre but est de démontrer la stabilisation de cette solution, ce qui peut être obtenu en prouvant que l'énergie associée au système considéré est décroissante. On se propose, d'abord, de présenter succinctement la méthode choisie afin de prouver notre résultat.

3.1 Méthode de Lyapunov

La méthode de Lyapunov est une des méthodes classiques concernant l'étude qualitative des solutions d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles. Elle permet, en effet, d'établir la stabilité d'un système dynamique. Elle comprend un ensemble de résultats mathématiques aboutissant à la décroissance de l'énergie du système étudié. Cette méthode, du nom du mathématicien Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918), consiste en la détermination d'une fonctionnelle candidate de Lyapunov respectant certaines propriétés de positivité et de dérivabilité.

La décroissance d'une énergie peut être de différentes natures, selon sa vitesse.

On dit qu'un système est fortement asymptotiquement stable lorsque

$$\lim_{t \to +\infty} E(t) = 0.$$

Dans la pratique, il est difficilement envisageable de montrer cette propriété de stabilité. Dans ce cas, on peut essayer de démontrer un résultat de stabilité uniforme dont on distingue, au moins, quatre types différents énumérés selon une progression d'intensité croissante.

1. La décroissance logarithmique de l'énergie est vérifiée si

   $$E(t) \leq \frac{C}{(\ln(1+t))^{\alpha}},$$

   où C est une constante positive indépendante de t et $\alpha > 0$.

2. La décroissance sera dite polynomiale lorsque

   $$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}},$$

   où C est une constante positive indépendante de t et $\alpha > 0$.

3. On parlera de décroissance exponentielle dans le cas où

   $$E(t) \leq C e^{-\alpha t},$$

   où C est une constante positive indépendante de t et $\alpha > 0$.

4. Finalement l'énergie du système jouit d'une propriété de décroissance générale si

   $$E(t) \leq C e^{-\alpha f(t)},$$

   où C est une constante positive indépendante de t, $\alpha > 0$ et f est une fonction qui admet une propriété de croissance générale.

3.2 Enoncé du théorème principal

Avant d'énoncer le principal résultat de ce chapitre, on définit l'énergie associée au problème (0.18)-(0.20) par

$$\begin{aligned} E(t) :=& \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ &+ \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où ξ est la constante positive définie par (0.16). On peut, alors, énoncer le théorème suivant portant sur la stabilisation du système.

Théorème 3.1. *On suppose les hypothèses (0.9)-(0.16) et (2.2) satisfaites et on admet de plus que $\mu_2 < \mu_1$. Alors, il existe deux constantes positives $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que l'énergie $E(t)$ définie par (3.1) vérifie*

$$E(t) \leq \alpha \exp\left(-\beta \int_0^t \mu(s)ds\right), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.2}$$

où μ est une fonction vérifiant les hypothèses (0.11)-(0.12).

Ce résultat indique que l'énergie du système admet une propriété de décroissance générale. La preuve du Théorème 3.1 repose sur plusieurs lemmes. Dans l'optique de démontrer notre résultat, on se propose, d'abord, de montrer que la dérivée de la fonctionnelle E est négative.

D'après l'expression (3.1), on a

$$\begin{aligned} E'(t) =& \int_\Omega u_{tt}(t)u_t(t)dx + \int_\Omega \Delta u_t(t)\Delta u(t)dx + \int_\Omega M(\|\nabla u(t)\|^2)\nabla u_t(t)\nabla u(t)dx \\ &+ \int_\Omega f(u(t))u(t)dx + \xi \int_\Omega \int_0^1 z_t(x,\rho,t)z(x,\rho,t)d\rho dx. \end{aligned}$$

ou encore, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} E'(t) =& \int_\Omega \left[u_{tt}(t) + \Delta^2 u(t) - M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) + f(u(t))\right] u_t(t)dx \\ &+ \xi \int_\Omega \int_0^1 z_t(x,\rho,t)z(x,\rho,t)d\rho dx. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation (0.19), on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) =& \int_\Omega \left[-\mu_1 u_t(t) - \mu_2 z(x,1,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds\right] u_t(t)dx \\ &+ \xi \int_\Omega \int_0^1 z_t(x,\rho,t)z(x,\rho,t)d\rho dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Concernant le dernier terme du membre de droite de l'expression précédente, on a

$$
\begin{aligned}
&\xi \int_\Omega \int_0^1 z_t(x,\rho,t) z(x,\rho,t) d\rho dx \\
=&-\frac{\xi}{\tau} \int_\Omega \int_0^1 z_\rho(x,\rho,t) z(x,\rho,t) d\rho dx \\
=&-\frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x,\rho,t) d\rho dx \\
=&-\frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega [z^2(x,1,t) - z^2(x,0,t)] dx \\
=&-\frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega z^2(x,1,t) dx + \frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega u_t^2(x,t) dx,
\end{aligned}
$$

et l'équation (3.3) s'écrit

$$
\begin{aligned}
E'(t) =& -\mu_1 \|u_t(t)\|^2 - \mu_2 \int_\Omega z(x,1,t) u_t(t) dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds \right) u_t(t) dx \\
& - \frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega z^2(x,1,t) dx + \frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega u_t^2(x,t) dx.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

En appliquant l'inégalité de Young (1.5), l'égalité (3.4) implique que

$$
\begin{aligned}
E'(t) \leq & -\mu_1 \|u_t(t)\|^2 + \frac{\mu_2}{2} \int_\Omega z^2(x,1,t) dx + \frac{\mu_2}{2} \int_\Omega u_t^2(t) dx \\
& - \frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega z^2(x,1,t) dx + \frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega u_t^2(x,t) dx \\
& + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds \right) u_t(t) dx.
\end{aligned}
$$

ou bien , en intégrant par parties,

$$
\begin{aligned}
E'(t) \leq & -\left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2} \right) \|u_t(t)\|^2 - \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_\Omega z^2(x,1,t) dx \\
& - \int_0^t g(t-s) \left(\nabla u(s), \nabla u_t(t) \right) ds.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

En vertu de l'hypothèse (0.16), on peut remarquer que les deux premiers termes du membre de droite de l'inéquation (3.5) sont négatifs. Toutefois, la difficulté se pose quant au signe du dernier terme de ce même membre. On ne peut donc pas déduire, à ce stade, la négativité de $E'(t)$.

De ce fait, nous allons introduire un procédé de perturbation de l'énergie par l'intermédiaire d'une énergie dite modifiée.

3.3 Estimation de la dérivée de l'énergie modifiée

On définit d'abord la fonctionnelle représentant l'énergie modifiée, notée F, par

$$\begin{aligned} F(t) =: & \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ & + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 \\ & + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) + \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où ξ demeure la constante positive définie par l'hypothèse (0.16).

On remarque immédiatement que

$$\begin{aligned} F(t) \geq & \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \lambda\int_0^{+\infty} g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|^2 \\ & + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx \\ & + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) + \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx \\ & \geq lE(t), \end{aligned}$$

où l est la constante positive donnée par l'hypothèse (0.10). Le lemme suivant présente une estimation de la dérivée de l'énergie modifiée.

Lemme 3.1. *On suppose les hypothèses du Théorème 3.1 satisfaites. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que la fonctionnelle F définie par l'expression (3.6) vérifie, pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) \leq & -c\int_\Omega u_t^2(t)dx - c\int_\Omega z^2(x,1,t)dx \\ & + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Démonstration. D'après la définition de $F(t)$, et en vertu de l'inégalité (2.17) obtenue au chapitre précédent, on remarque que, de manière analogue

$$\begin{aligned} & F(t) + c_1\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + c_2\int_0^t \int_\Omega z^2(x,1,s)dxds \\ & - \int_0^t \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(s)ds + \int_0^t \frac{1}{2}g(s)\|\nabla u(s)\|^2 ds \\ \leq & F(0). \end{aligned}$$

Puis, en dérivant par rapport à t et en prenant $c = \min c_1, c_2$, on obtient le résultat escompté au titre du Lemme 3.1.

$\square$

Nous pouvons donc affirmer la décroissance de l'énergie (car $E'(t) \leq 0$). Afin de pouvoir démontrer la stabilisation du système modélisé par le problème étudié, il nous faut disposer d'une décroissance de l'énergie vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Pour cela, nous nous proposons d'introduire deux fonctions auxiliaires définies aux sections suivantes.

3.4 Estimation liée à une première fonction auxiliaire

On définit, ainsi, la première fonctionnelle comme suit

$$\Phi(t) := \int_\Omega u_t(t)u(t)dx. \tag{3.8}$$

Alors, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, la fonctionnelle définie par l'expression (3.8) vérifie pour tout $\eta > 0$ et pour $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq & \left(1 + \frac{\mu_1}{4\eta}\right)\|u_t(t)\|^2 - \hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ & - (l - \eta\lambda - \eta\lambda\lambda_1(\mu_1 + \mu_2))\|\Delta u(t)\|^2 \\ & + \frac{\mu_2}{4\eta}\int_\Omega z^2(x,1,t)dx + \frac{1-l}{4\eta\lambda}(g \circ \nabla u)(t) - \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx,\end{aligned} \tag{3.9}$$

où λ_1 est la constante de Poincaré.

Démonstration. En dérivant Φ par rapport à t, on a

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \int_\Omega u_{tt}(t)u(t)dx + \|u_t(t)\|^2.$$

Or, puisque

$$\begin{aligned}u_{tt}(t) = & -\Delta^2 u(t) + M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) \\ & - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \mu_1 u_t(x,t) - \mu_2 z(x,1,t) - f(u(t)).\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) =& \|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega \Big(- \Delta^2 u(t) + M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(t) \\ & - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \mu_1 u_t(x,t) - \mu_2 z(x,1,t) - f(u(t))\Big) u(t)dx,\end{aligned}$$

ou encore, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) =& \|u_t(t)\|^2 - \|\Delta u(t)\|^2 - M(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla u(t)\|^2 \\ & + \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t))ds - \mu_1 \int_\Omega u_t(x,t)u(t)dx \\ & - \mu_2 \int_\Omega z(x,1,t)u(t)dx - \int_\Omega f(u)u(t)dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

En outre, d'après les hypothèses (0.9) et (0.14), on peut remarquer que

$$\begin{aligned}& - M(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla u(t)\|^2 \leq -\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2), \\ & - \int_\Omega f(u)u(t)dx \leq - \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx.\end{aligned}$$

L'équation (3.10) implique donc que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq& \|u_t(t)\|^2 - \|\Delta u(t)\|^2 - \hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ & + \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t))ds - \mu_1 \int_\Omega u_t(x,t)u(t)dx \\ & - \mu_2 \int_\Omega z(x,1,t)u(t)dx - \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx.\end{aligned} \tag{3.11}$$

D'après les inégalités de Young (1.4) et de Cauchy-Scharwz (1.2) et en rappelant que

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq \lambda \|\Delta u(t)\|^2,$$

on a, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t))ds \\
=&\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \left(\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\right)\nabla u(t)dxds \\
\leq &\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(s)||\nabla u(t)|dxds + \int_0^t g(t-s)ds\|\nabla u(t)\|^2 \\
\leq &\|\nabla u(t)\|\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|ds + \int_0^t g(t-s)ds\|\nabla u(t)\|^2 \\
= &\|\nabla u(t)\|\int_0^t \sqrt{g(t-s)}\sqrt{g(t-s)}\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|ds + \int_0^t g(t-s)ds\|\nabla u(t)\|^2 \\
\leq &\|\nabla u(t)\|\left(\int_0^t g(t-s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t g(s)ds\|\nabla u(t)\|^2 \\
\leq &\sqrt{\lambda}\|\Delta u(t)\|\left(\int_0^{+\infty} g(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g\circ\nabla u(t))^{\frac{1}{2}} + \lambda\int_0^{+\infty} g(s)ds\|\Delta u(t)\|^2 \\
\leq &\eta\lambda\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{4\eta}\|g(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}(g\circ\nabla u)(t) + \lambda\int_0^{+\infty} g(s)ds\|\Delta u(t)\|^2 \\
\leq &(1-l+\eta\lambda)\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{4\eta}\|g(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}(g\circ\nabla u)(t) \\
= &(1-l+\eta\lambda)\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1-l}{4\eta\lambda}(g\circ\nabla u)(t).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

La dernière égalité ayant été obtenue en vertu de l'hypothèse (0.10).

En vertu des inégalités susmentionnées ainsi que celle de Poincaré (1.7), on déduit que, pour tout $\eta > 0$,

$$-\mu_1\int_\Omega u_t(t)u(t)dx \leq \mu_1\eta\lambda\lambda_1\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{\mu_1}{4\eta}\|u_t(t)\|^2, \tag{3.13}$$

$$-\mu_2\int_\Omega z(x,1,t)u(t)dx \leq \mu_2\eta\lambda\lambda_1\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{\mu_2}{4\eta}\int_\Omega z^2(x,1,t)dx, \tag{3.14}$$

où λ_1 est la constante de Poincaré.

En combinant les estimations (3.11)-(3.14), on achève la preuve du Lemme 3.2. □

3.5 Estimation liée à une seconde fonction auxiliaire

Dans le but de traiter le terme retard représenté par la fonction z, on introduit la fonctionnelle suivante

$$\Psi(t) := \int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx. \tag{3.15}$$

On présente dans le lemme qui suit une majoration de la dérivée de Ψ.

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, la fonctionnelle Ψ définie par l'expression (3.15) vérifie pour tout $\eta > 0$ et pour $t \geq 0$,*

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) \leq -2\rho\Psi(t) - \frac{c_1}{\tau}\int_\Omega z^2(x,\rho,t)dx + \frac{1}{\tau}\|u_t(t)\|^2, \tag{3.16}$$

où $c_1 > 0$ est une constante.

Démonstration. En dérivant Ψ par rapport à t et en utilisant l'équation de (0.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi(t) =& \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx\right)\\
=& \int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)\right)d\rho dx\\
=& 2\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z(x,\rho,t)z_t(x,\rho,t)d\rho dx\\
=& -\frac{2}{\tau}\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z(x,\rho,t)z_\rho(x,\rho,t)d\rho dx\\
=& -\frac{1}{\tau}\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)\right)d\rho dx - 2\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx\\
=& -\frac{1}{\tau}\int_\Omega e^{-2\tau}z^2(x,1,t)dx + \frac{1}{\tau}\int_\Omega z^2(x,0,t)dx - 2\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx\\
=& -\frac{e^{-2\tau}}{\tau}\int_\Omega z^2(x,1,t)dx + \frac{1}{\tau}\|u_t(t)\|^2 - 2\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx.
\end{aligned}$$

En choisissant $0 < c_1 < e^{-2\tau}$, et en rappelant que $0 < \rho < 1$, le Lemme 3.3 est démontré. □

3.6 Estimation de la dérivée d'une première fonctionnelle de Lyapunov

Dans l'optique de prouver la décroissance de l'énergie, on considère la fonction de Lyapunov suivante

$$\mathscr{L}(t) := F(t) + \epsilon\Phi(t) + \epsilon\Psi(t), \tag{3.17}$$

où F, Φ et Ψ sont les fonctionnelles définies précédemment et $\epsilon > 0$ est un réel que l'on déterminera par la suite. Le lemme qui suit offre une majoration de la dérivée de $\mathscr{L}$.

Lemme 3.4. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, il existe deux constantes positives α_1 et α_2 telles que*

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\alpha_1 F(t) + \alpha_2 (g \circ \nabla u)(t). \tag{3.18}$$

où F est l'énergie modifiée donnée par l'expression (3.6).

Démonstration. Par définition de $\mathscr{L}$, on a

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) = \frac{d}{dt}F(t) + \epsilon\frac{d}{dt}\Phi(t) + \epsilon\frac{d}{dt}\Psi(t),$$

et en vertu des Lemme 3.1, Lemme 3.2 et Lemme 3.3, on peut déduire que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & - c\|u_t(t)\|^2 dx - c\int_\Omega z^2(x,1,t)dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \\
& - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2 + \epsilon\left(1 + \frac{\mu_1}{4\eta}\right)\|u_t(t)\|^2 - \epsilon\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\
& - \epsilon(l - \eta\lambda - \eta\lambda\lambda_1(\mu_1+\mu_2))\|\Delta u(t)\|^2 \\
& + \frac{\epsilon\mu_2}{4\eta}\int_\Omega z^2(x,1,t)dx + \frac{\epsilon(1-l)}{4\eta\lambda}(g\circ\nabla u)(t) - \epsilon\int_\Omega \hat{f}(u(t))dx \\
& - 2\epsilon\rho\Psi(t) - \frac{\epsilon c_1}{\tau}\int_\Omega z^2(x,1,t)dx + \frac{\epsilon}{\tau}\|u_t(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & - \left(c - \epsilon\left(1 + \frac{\mu_1}{4\eta}\right) - \frac{\epsilon}{\tau}\right)\|u_t(t)\|^2 - \epsilon\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\
& - \epsilon(l - \eta\lambda - \eta\lambda\lambda_1(\mu_1+\mu_2))\|\Delta u(t)\|^2 - \epsilon\int_\Omega \hat{f}(u(t))dx \\
& - 2\epsilon\rho\Psi(t) - \left(c + \frac{c_1\epsilon}{\tau} - \frac{\mu_2\epsilon}{4\eta}\right)\int_\Omega z^2(x,1,t)dx \\
& + \frac{\epsilon(1-l)}{4\eta\lambda}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Puisque

$$-2\epsilon\rho\Psi(t) = -2\epsilon\rho\int_\Omega e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq -2\epsilon\rho e^{-2\tau}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx,$$

il découle de l'inéquation précédente que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & - \left(c - \epsilon\left(1 + \frac{\mu_1}{4\eta}\right) - \frac{\epsilon}{\tau}\right)\|u_t(t)\|^2 - \epsilon\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\
& - \epsilon(l - \eta\lambda - \eta\lambda\lambda_1(\mu_1+\mu_2))\|\Delta u(t)\|^2 - \epsilon\int_\Omega \hat{f}(u(t))dx \\
& - 2\epsilon\rho e^{-2\tau}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx - \left(c + \frac{c_1\epsilon}{\tau} - \frac{\mu_2\epsilon}{4\eta}\right)\int_\Omega z^2(x,1,t)dx \\
& + \frac{\epsilon(1-l)}{4\eta\lambda}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Posant, afin d'alléger les notations,

$$\eta_1 := \left(c - \epsilon\left(1 + \frac{\mu_1}{4\eta}\right) - \frac{\epsilon}{\tau}\right),$$
$$\eta_2 := \epsilon(l - \eta\lambda - \eta\lambda\lambda_1(\mu_1 + \mu_2)),$$
$$\eta_3 := 2\epsilon\rho e^{-2\tau},$$
$$\eta_4 := \left(c + \frac{c_1\epsilon}{\tau} - \frac{\mu_2\epsilon}{4\eta}\right),$$
$$\eta_5 := \frac{\epsilon(1-l)}{4\eta\lambda}.$$

L'inéquation (3.19) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & -\eta_1\|u_t(t)\|^2 - \eta_2\|\Delta u(t)\|^2 - \epsilon\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ & - \epsilon\int_\Omega \hat{f}(u(t))dx - \eta_3\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx - \eta_4\int_\Omega z^2(x,1,t)dx \\ & + \eta_5(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2,\end{aligned}$$

ou encore, en posant

$$\alpha_1 = \min\{2\eta_1, 2\eta_2, 2\epsilon, \epsilon, \frac{2\eta_3}{\xi}\},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\alpha_1\Big(&\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ & + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx\Big) - \eta_4\int_\Omega z^2(x,1,t)dx \\ & + \eta_5(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2.\end{aligned}$$

On peut, maintenant, choisir $\eta > 0$ et $\epsilon > 0$ assez petits afin que $\alpha_1 > 0$ et $\eta_4 > 0$.

Aussi, puisque

$$-\eta_4\int_\Omega z^2(x,1,t)dx + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2 \leq 0,$$

on déduit que, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & -\alpha_1\Big(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ & + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx\Big) + \eta_5(g\circ\nabla u)(t).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Afin de faire apparaître l'énergie modifiée au membre de droite de l'inéquation (3.20), on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq &- \alpha_1\Big(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2) \\ &+ \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx \\ &- \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)\Big) \\ &+ \alpha_1\Big(-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)\Big) \\ &+ \eta_5(g\circ\nabla u)(t).\end{aligned}$$

La dernière inégalité entraîne que

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\alpha_1 F(t) + \alpha_2(g\circ\nabla u)(t), \tag{3.21}$$

où $\alpha_2 = \eta_5 + \frac{\alpha_1}{2}$. ce qui achève la preuve du Lemme 3.4. $\square$

3.7 Equivalence entre l'énergie modifiée et une seconde fonctionnelle de Lyapunov

On introduit, à présent, une seconde fonction de Lyapunov par

$$\mathscr{F}(t) := \mu(t)\mathscr{L}(t) + 2\alpha_2 F(t), \tag{3.22}$$

où $\mathscr{L}$ et $F(t)$ sont respectivement la première fonction de Lyapunov définie par (3.17) et l'énergie modifiée donnée par (3.6). La fonction μ vérifie les hypothèses (0.11)-(0.12) et la constante α_2 est celle donnée par le Lemme 3.4.

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que*

$$(\mu(t)\beta_1 + 2\alpha_2)F(t) \leq \mathscr{F}(t) \leq (\mu(t)\beta_2 + 2\alpha_2)F(t). \tag{3.23}$$

Autrement dit, les fonctions F et $\mathscr{F}$ sont équivalentes.

Démonstration. En vertu de l'inégalité de Young (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} |\Phi(t)+\Psi(t)| &= \left| \int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \int_\Omega \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x,\rho,t)d\rho dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2\lambda'}\|\Delta u(t)\|^2 + \int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où λ' est la première valeur propre de l'opérateur bilaplacien, vérifiant

$$\Delta^2 u = \lambda u \text{ dans } \Omega \text{ avec } u = \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx \leq E(t),$$

on peut déduire que

$$\begin{aligned} |\Phi(t)+\Psi(t)| &\leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2\lambda'}\|\Delta u(t)\|^2 + \int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx \\ &\leq \max\left\{1, \frac{1}{\lambda'}, \frac{2}{\xi}\right\} E(t) \\ &\leq \frac{1}{l}\max\left\{1, \frac{1}{\lambda'}, \frac{2}{\xi}\right\} F(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

La dernière inégalité est vérifiée puisque $E(t) \leq \frac{1}{l}F(t)$. Aussi, en posant $C_1 = \frac{1}{l}\max\left\{1, \frac{1}{\lambda'}, \frac{2}{\xi}\right\}$, on a

$$|\mathscr{L}(t) - F(t)| = \epsilon|\Phi(t)+\Psi(t)| \leq \epsilon C_1 F(t), \tag{3.26}$$

ce qui donne

$$-\epsilon C_1 F(t) \leq \mathscr{L}(t) - F(t) \leq \epsilon C_1 F(t),$$

ou encore

$$(1-\epsilon C_1)F(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq \epsilon(1+C_1)F(t).$$

En prenant maintenant $\epsilon > 0$ assez petit et choisissant

$$\beta_1 := 1 - \epsilon C_1 > 0, \quad \beta_2 := 1 + \epsilon C_1 > 0,$$

on conclut que

$$\beta_1 F(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq \beta_2 F(t). \tag{3.27}$$

En multipliant (3.27) par $\mu(t)$ puis en ajoutant $2\alpha_2 F(t)$, on obtient

$$(\mu(t)\beta_1 + 2\alpha_2)F(t) \leq \mathscr{F}(t) \leq (\mu(t)\beta_2 + 2\alpha_2)F(t),$$

on en déduit, ainsi, que $\mathscr{F}(t)$ est équivalent à $F(t)$, ce que l'on note par

$$\mathscr{F}(t) \sim F(t), \tag{3.28}$$

ce qui achève la preuve du Lemme 3.5. $\square$

3.8 Comportement asymptotique de la solution

En multipliant les deux membres de l'estimation (3.18) du Lemme 3.4 par $\mu(t) > 0$, on obtient, pour tout $t \geq 0$,

$$\mu(t)\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\alpha_1\mu(t)F(t) + \alpha_2\mu(t)(g \circ \nabla u)(t). \tag{3.29}$$

Ceci implique, grâce à l'hypothèse (0.11) et au Lemme 3.1, que, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mu(t)\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) &\leq -\alpha_1\mu(t)F(t) - \alpha_2(g' \circ \nabla u)(t)\\ &\leq -\alpha_1\mu(t)F(t) - 2\alpha_2F'(t),\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\Big(\mu(t)\mathscr{L}(t) + 2\alpha_2F(t)\Big) - \mu'(t)\mathscr{L}(t) \leq -\alpha_1\mu(t)F(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.30}$$

En rappelant que $\mu'(t) \leq 0$, l'inéquation précédente entraîne

$$\frac{d}{dt}\mathscr{F}(t) \leq -\alpha_1\mu(t)F(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.31}$$

D'après le Lemme 3.5 ainsi que l'inéquation (3.31), on conclut qu'il existe $\alpha_3 > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mathscr{F}(t) \leq -\alpha_1\mu(t)F(t) \leq -\alpha_3\mu(t)\mathscr{F}(t). \tag{3.32}$$

Intégrant (3.32) sur $(0, t)$, il découle que

$$\mathscr{F}(t) \leq \mathscr{F}(0)\exp\left(-\alpha_3\int_0^t \mu(s)ds\right), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.33}$$

En vertu de l'équivalence (3.28), on peut en déduire qu'il existe une constante positive c_1 telle que

$$F(t) \leq c_1 \exp\left(-\alpha_3 \int_0^t \mu(s)ds\right), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.34}$$

Puisque

$$E(t) \leq \frac{1}{l} F(t),$$

on achève la démonstration du Théorème 3.1 en affirmant que

$$E(t) \leq c_2 \exp\left(-\alpha_3 \int_0^t \mu(s)ds\right), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.35}$$

où $c_2 = \frac{c_1}{l}$.

Ainsi, nous avons établi la décroissance générale de l'énergie associée à l'équation de départ, et, a fortiori, la stabilisation de la solution du problème étudié.

Remarque 3.1. *On peut vérifier que les décroissances exponentielle et polynomiale sont des cas particuliers de la décroissance générale établie par l'estimation (3.35). En effet, la décroissance exponentielle correspond au choix*

$$\mu(t) = a,$$

où a est une constante positive, alors que la décroissance polynomiale est obtenue lorsque que l'on considère

$$\mu(t) = \frac{a}{1+t},$$

où a demeure une constante positive.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le cadre de ce travail, basé notamment sur l'article [13] écrit par Baowei Feng et intitulé *Global Well-Posedness and Stability for a Viscoelastic Plate Equation with a Time Delay*, nous avons traité une équation hyperbolique modélisant les vibrations d'une plaque ayant un comportant viscoélastique. Cette équation comporte un terme retard, un terme lié à l'amortisseur du système mécanique et un terme représentant la mémoire viscoélastique de la plaque.

Sous des hypothèses convenables sur les données initiales du problème considéré, le terme source non linéaire f ainsi que sur la fonction de relaxation g et les coefficients d'amortissement et de retard μ_1 et μ_2 respectivement, nous avons d'abord montré l'existence globale de solutions faibles en utilisant la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin.
Nous avons, ensuite, étudié la régularité de ces solutions, avant de prouver que celles-ci dépendent continûment des données initiales. L'unicité de la solution est ainsi établie.
Enfin, en nous appuyant sur la méthode de stabilité de Lyapunov, nous avons démontré la stabilisation du système en établissant un résultat de décroissance générale de l'énergie associée à la solution.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à un système mécanique doté d'un faible amortisseur symbolisé par le terme $\mu_1 u_t$. Nous pourrions étudier un système pour lequel on considère un fort amortissement auquel cas le terme précédent serait remplacé par $\mu_1 \Delta u_t$. Andrade et al. [2] ont démontré un résultat de décroissance de l'énergie d'un système pour lequel la dissipation essentielle est donnée par un fort amortissement.

Nous pourrions également traité un problème pour lequel le retard n'est pas constant mais dépend du temps d'où la présence d'un terme de dissipation de la forme $u_t(t-\tau(t))$, où τ est une fonction vérifiant des hypothèses appropriées, ce cas a été étudié par Feng [14].

Nous pouvons aussi mentionner les travaux qu modélisent des systèmes faisant intervenir un amortissement non linéaire de la forme $g(u_t)$, où g est une fonction convenable à l'instar de ceux de Cavalvanti et al. [6] ou encore ceux de Benaissa et Louhibi [3]. Ces derniers ont établi un résultat de décroissance générale de l'énergie en présence de termes d'amortissement et de retard non linéaires.

Lorsque les valeurs de μ_1 et μ_2 dépendent des variables spatiales, ces coefficients sont dites fonctions de localisation. Celles-ci apparaissent lorsque les forces de dissipation ne s'exercent pas uniformément sur l'ensemble du système mais de manière différenciée selon les régions constituant le domaine. Messaoudi [20] a traité ce cas de figure.

Nous devrions également citer les problèmes pour lesquels l'amortissement et le retard relatifs au système sont distribués et agissent sur le bord du domaine d'étude. C'est le cas, notamment, des problèmes aux conditions aux limites de Wentzell étudiés par Dahmani et Khemmoudj [8] et Ihaddadene et Khemmoudj [16].
Récemment, Sabbagh et al. [26] ont étudié une équation modélisant un système viscoélastique de type Petrovsky pour lequel l'amortissement non linéaire est localisé seulement dans un voisinage d'une partie adéquate du bord du domaine. Les auteurs ont prouvé la décroissance exponentielle du système.

Enfin, notons que si des hypothèses adéquates ne sont pas formulées sur les données, alors le système étudié peut s'avérer instable. Datko et al. [10] ont montré qu'un effet retard localisé sur la frontière du domaine unidimensionnel d'étude pouvait être à l'origine de l'instabilité du système bien que ce dernier soit uniformément asymptotiquement stable en l'absence d'un effet retard.
Nicaise et Pignotti [22] ont également produit des résultats de stabilité et d'instabilité concernant l'équation des ondes avec un terme retard localisé dans un domaine pluridimensionnel.

La modélisation mathématique de phénomènes naturels permet la compréhension, la prédiction et le contrôle de nombreux processus tels que l'écoulement de fluides (en mécanique), la dynamique de populations (en biologie) ou encore l'évolution d'un produit dérivé en fonction du prix et de l'actif sous-jacent (en finance). Puisque, de manière générale, il n'est pas envisageable de résoudre analytiquement l'équation émanant du modèle, on procède, en priorité, à l'étude qualitative de la solution (avec comme point d'orgue l'étude de son comportement asymptotique), ce qui nous permet ainsi d'anticiper son comportement. On envisagera, par la suite, une approche numérique aboutissant, éventuellement, à une solution approchée qui converge (dans un certain sens) vers la solution exacte de notre problème initial.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces.* Elsevier Science, 2003.

[2] D. Andrade, M.A.J Silva, and T. Ma. Exponential stability for a plate equation with p-Laplacian and memory terms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35, 2012.

[3] A Benaissa and N. Louhibi. Global existence and energy decay of solutions to a nonlinear wave equation with a delay term. *Georgian Mathematical Journal*, 20, 2013.

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1983.

[5] M. Cavalcanti, V. Domingos Cavalcanti, and T. Ma. Exponential decay of the viscoelastic Euler–Bernouli equation with a nonlocal dissipation in general domains. *Differential and Integral Equations*, 17, 2004.

[6] M. Cavalcanti, V. Domingos Cavalcanti, and J. Soriano. Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation. *Communications in Contemporary Mathematics*, 6, 2004.

[7] P.G. Ciarlet. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.* SIAM, October 2013.

[8] A. Dahmani and A. Khemmoudj. Stability of the wave equation with localized Kelvin-Voigt damping and dynamic Wentzell boundary conditions with delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022.

[9] Q. Dai and Z. Yang. Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik*, 65, 2012.

[10] R. Datko, J. Lagnese, and M. P. Polis. An Example on the Effect of Time Delays in Boundary Feedback Stabilization of Wave Equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24 :152–156, 1986.

[11] L. C. Evans. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations.* American Mathematical Soc., 1990.

[12] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[13] B. Feng. Global Well-Posedness and Stability for a Viscoelastic Plate Equation with a Time Delay. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015 :1–10, 2015.

[14] B. Feng. Well-posedness and exponential stability for a plate equation with time-varying delay and past history. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 68, 2016.

[15] T.H. Grönwall. Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations. *Annals of Mathematics*, 20 :292–296, 1919. Publisher : Annals of Mathematics.

[16] L. Ihaddadene and A. Khemmoudj. General decay for a wave equation with Wentzell boundary conditions and nonlinear delay terms. *International Journal of Control*, 95, 2021.

[17] J. Kim. A boundary thin obstacle problem for a wave equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 14 :1011–1026, 1989.

[18] M. Kirane and B. Said-Houari. Existence and asymptotic stability of viscoelastic wave equation with a delay. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 62 :1065–1082, 2011.

[19] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Collection études mathématiques. Dunod, 1969.

[20] S. Messaoudi. General Decay of Solutions of a Weak Viscoelastic Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 36 :1457–1467, 2008.

[21] S. Messaoudi and S.E. Mukiawa. Existence and decay of solutions to a viscoelastic plate equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, 2016.

[22] S. Nicaise and C. Pignotti. Stability and Instability Results of the Wave Equation with a Delay Term in the Boundary or Internal Feedbacks. *SIAM J. Control and Optimization*, 45 :1561–1585, 2006.

[23] S. Nicaise and C. Pignotti. Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Differential and Integral Equations*, 21, 2008.

[24] S. Nicaise, J. Valein, and E. Fridman. Stability of the heat and the wave equations with boundary time-varying delays. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 2, 2009.

[25] V. Pata and A. Zucchi. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 11, 2001.

[26] Z. Sabbagh, A. Khemmoudj, and M. Abdelli. Well-posedness and stability for a viscoelastic Petrovsky equation with a localized nonlinear damping. *SeMA Journal*, 2023.

[27] J. Simon. Compact sets in the space Lp(0,T ;B). *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146 :65–96, 1986.

[28] Z. Yang. Existence and energy decay of solutions for the Euler–Bernoulli viscoelastic equation with a delay. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 66 :727–745, 2014.

[29] K. Yosida. Strong Convergence and Weak Convergence. In K. Yosida, editor, *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, pages 119–145. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.

[30] E. Zeidler. Hilbert Space Methods and Linear Parabolic Differential Equations. In E. Zeidler, editor, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/ A : Linear Monotone Operators*, pages 402–451. Springer, New York, NY, 1990.